

1.) Feladat

Tekintse a függőleges hajítás problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

- Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!
- Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az $S(x, t)$ függvényt
 $S(x, t) = S_0(x, E) - E t$ alakban, ahol E egy állandó. Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?
- Oldja meg az S_0 -ra vonatkozó egyenletet!
- Az $S(x, E, t)$ függvény ismeretében adja meg az általa, mint alkotófüggvény által generált kanonikus transzformációt, azaz fejezze ki az E -hez kanonikusan konjugált β_E koordinátát!
- A $t = 0$ időpillanatban a vizsgált tömegpont az $x = 0$ pontból indult p_0 impulzussal. Ez alapján adja meg az E paraméter értékét, és a β_E konstans értékét!
- Adja meg a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

2.) Feladat

Tekintsen egy egydimenziós harmonikus oszcillátort, aminek Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- Írja fel a Lagrange-féle mozgásegyenleteket! Adja meg a megoldás általános alakját!
- Keressen olyan megoldást, amire $x(0) = 0$ és $x(t_v) = x_v$!
- Határozza meg az S hatásfüggvény értékét, amit a b.)-ben kapott megoldás mentén a hatásfunktional felvesz! Jelölje ezt $S(x_v, t_v)$!
- Mutassa meg, hogy S kielégíti a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!
- Mivel egyenlő $\frac{\partial S}{\partial t_v}$?

3.) Feladat

Tekintse a kétdimenziós anharmonikus oszcillátor problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$

- Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!
- Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az S függvényt
 $S(x, y, t) = S_0(x, y, E) - E t$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?
- Szeparálja az S_0 függvényt, azaz keresse az alábbi alakban a megoldást:
 $S_0(x, y, E, \alpha) = S_x(x, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$!
Milyen egyenleteket elégít ki S_x és S_y ? A megjelenő új állandót α -val jelöltük.
- Adja meg az S_x , S_y függvényeket, és ezzel a Hamilton-Jacobi egyenlet teljes $S(x, y, E, \alpha, t)$ megoldását!
- A $t = 0$ időpontban a tömegpont az $x=x_0$ és $y=y_0$ kezdőpontból indult zérus impulzussal. Adja meg az E és β paraméterek értékeit!
- Hogyan nyerhetjük $S(x, y, E, \alpha, t)$, és a kezdeti feltételek ismeretében az $x(t)$ $y(t)$ megoldásokat? (Nem kell végigszámolnia, nagyon hosszadalmas!)

4.) Feladat

Két azonos m tömegű tömegpontot egy D rugóállandójú rugó köt össze, a tömegpontok az x tengely mentén mozoghatnak, a rendszer Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} D(x_1 - x_2)^2$$

- Írja fel a rendszer teljes (időfüggetlen) Hamilton-Jacobi egyenletét!
 - Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az S függvényt $S(x_1, x_2, t) = S_0(x_1, x_2, E) - Et$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?
 - Láthatóan a további x_1, x_2 szerinti szeparálást nem tudja közvetlenül elvégezni. Térjünk át az egyenletben az $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = x_1 - x_2$ változókra, azaz írja fel a b.) feladatban nyert S_0 -ra vonatkozó egyenletet az X és y változók szerint!
 - Szeparálja az S_0 függvényt az alábbi alakban:
 $S_0(X, y, E, \alpha) = S_X(X, E, \alpha) + S_Y(y, E, \alpha)$!
 Milyen egyenletet elégít ki S_X és S_Y ? A megjelenő új állandót jelölje α -val!
 - Adja meg az S_X és S_Y függvényeket!
 - A kezdeti feltételek ($x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $p_{1,0}$ és $p_{2,0}$) ismeretében adja meg az α és E paraméterek értékét!
-

5.) Feladat

Tekintse a ferde hajítás problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy$$

- Írja fel a rendszer teljes Hamilton-Jacobi egyenletét, majd az időfüggetlenséget a korábbiakhoz hasonlóan szeparálva, írja fel az $S_0(x, y, E)$ -re vonatkozó „rövidített” Hamilton-Jacobi egyenletet!
 - Szeparálja az S_0 függvényt csak x -től és csak y -től függő S_x és S_y tagokra:
 $S_0(x, y, E, \alpha) = S_x(x, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$.
 Írja fel az S_x -re és S_y -re vonatkozó egyenleteket és oldja meg őket!
 - Adja meg az α és E paraméterek kezdeti feltételektől való függését!
 - Vázzolja egy adott t időpillanatban az $S(x, y, E, \alpha, t) = \text{const.}$ szintvonalakat az x - y síkon!
 - Rajzoljon be egy, az E és α paramétereknek megfelelő pályát az ábrába. Hogyan viszonyul ez geometriailag a d.)-ben meghatározott szintvonalakhoz?
-

6.) Feladat

Egy egydimenziós $V(x)$ potenciálban mozgó részecske időfüggő Schrödinger-egyenlete az alábbi alakú:

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

A hullámfüggvényt érdemes lehet az alábbi alakban keresni: $\psi(x, t) = A(x, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)}$.

- Írja be a fenti alakot a Schrödinger egyenletbe!
- Válogassa szét a megjelenő tagokat \hbar hatványai szerint.
- Amennyiben \hbar elegendően kicsiny, akkor elég benne a nulladrendű tagot tekinteni. Milyen egyenletet kap ekkor?
- Mikor elegendően kicsiny \hbar ?