MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	GYAK 10.

1.) Feladat

Tekintsük az alábbi egyszerű kanonikus transzformációkat generáló függvényeket:

$W_1(q,Q) = qQ$,

$W_2(q,P) = qP$,

$W_3(p,Q) = pQ$ és

$W_4(p,P) = pP$

a.) Vezessük le a fenti függvények által generált kanonikus transzformációkat!

b.) A kanonikus Poisson-zárójel összefüggések ellenőrzésével győződjünk meg arról, hogy valóban kanonikus transzformációkat kaptunk!

2.) Feladat

Adott egy lineáris harmonikus oszcillátor, melynek Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right).$$

Tekintse az alábbi generátorfüggvényeket, és kíséreljük meg levezetni a transzformációs összefüggéseket belőlük.

a.) $W_1(q,Q) = q + Q$

b.) $W_2(q,P) = q + P$

c.) $W_2(q,P) = (q+P)^2$

d.) Melyik valósít meg ténylegesen kanonikus transzformációt? Abban az esetben hajtsuk végre a transzformációt, és határozzuk meg az új $K(Q,P)$ Hamilton-függvényt!

e.) Írjuk fel az új kanonikus egyenleteket, és oldjuk is meg őket!

3.) Feladat

Előadáson szerepelt, hogy amennyiben egy „2”-es típusú alkotófüggvény az alábbi alakban áll előttünk:

$W_2(\underline{q},\underline{P}) = f_l(\underline{q})P_l \quad (l \in \{1,\ldots,f\})$,

úgy ez a transzformáció a $Q_l = f_l(\underline{q})$, $\quad p_m = \dfrac{\partial f_l(\underline{q})}{\partial q_m} P_l$ ún. pont-transzformációt hajtja végre.

a.) Tekintsük az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, Déscartes $\rightarrow$ polár koordinátarendszerek közötti transzformációt. Adjuk meg a transzformáció alkotófüggvényét!

b.) Fejezze ki a p_x és p_y „régi” impulzusokat a P_r és P_φ függvényében!

c.) Invertálja a b.)-ben kapott összefüggéseket, azaz adja meg a P_r és P_φ új impulzusokat a régi koordináták és impulzusok segítségével!

4.) Feladat

Egy harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

a.) Írjuk fel a kanonikus mozgásegyenleteket, oldjuk meg őket, és rajzoljuk fel a pályákat a *p*-*q* fázistérben!

b.) Láthatjuk, hogy az energiamegmaradás miatt a fázistérben ellipszis-pályákon mozog a rendszer. Jó ötletnek tűnik áttérni olyan kanonikus koordinátákra, ahol ezek az ellipszisek koordinátavonalak. Ezt valósítja meg az alábbi paraméterezés:

$$p = m\omega A\cos Q, \quad q = A\sin Q$$

Keressünk „1"-es típusú alkotófüggvényt ami ezt a transzformációt generálja!

c.) Adjuk meg az „új" P impulzust, és Q koordinátát a régi q és p változók segítségével!

d.) Adjuk meg az új K(Q,P) Hamilton-függvényt, írjuk fel a Hamilton egyenleteket és oldjuk meg őket!

5.) Feladat

Egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p^2}{2m}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 x^2 e^{2\alpha t}\,.$$

a.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit. Milyen jól ismert mechanikai rendszert ír le a Hamilton-függvény?

b.) Mutassa meg, hogy a Hamilton-függvényben szereplő p kanonikus impulzus nem a szokásos fizikai „ *m v*" impulzus! Mi a kettő közötti kapcsolat?

Tekintse az alábbi alkotófüggvényt:

$$W_1(x,Q) = -xQe^{\alpha t} - \frac{\alpha m}{2}x^2 e^{2\alpha t}$$

c.) Adja meg a W_1 által generált kanonikus transzformációt!

d.) Adja meg az új K(P,Q) Hamilton függvényt! Legyen óvatos, az alkotófüggvény explicit módon függ az időtől!

e.) Írja fel a mozgásegyenleteket az új, P,Q változókban, oldjuk meg!

f.) Transzformáljuk vissza az eredeti p,x változókra a megoldást!

6.) Feladat

Ebben a feladatban a célunk a forgó koordinátarendszerbe való áttérés megvalósítása alkotófüggvény segítségével. A megfelelő kanonikus transzformáció az alábbi alakú:

$$X = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \quad Y = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$P_X = p_x\cos\omega t + p_y\sin\omega t, \quad P_Y = -p_x\sin\omega t + p_y\cos\omega t$$

a.) A kanonikus Poisson-zárójelek kiszámításával ellenőrizzük, hogy valóban kanonikus transzformációról van szó! (Múltkor már szerepelt!)

b.) Határozzuk meg a transzformáció inverzét!

c.) Keressünk olyan $W_2(x,y,P_X,P_Y)$ alkotófüggvényt, ami a fenti transzformációt generálja

d.) Tekintsük a szabad mozgást végző részecske esetét, ahol:

$$H = \frac{p_x{}^2 + p_y{}^2}{2m}$$

Határozzuk meg a transzformáció utáni Hamilton-függvényt!

e.) Írjuk fel az új változókra a mozgásegyenleteket, és azonosítsuk a forgó rendszerben megjelenő tehetetlenségi erőket!