9. statisztikus fizika gyakorlat

2022. május 6.

1. Van-e Bose–Einstein-fázisátalakulás alacsonyabb dimenzióban?
2. Vizsgáljuk meg a háromdimenziós nemrelativisztikus Bose-gáz kémiai potenciáljának hőmérsékletfüggését a T_0 kondenzációs hőmérséklet felett, annak közelében!
   (a) Írjuk fel a $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget!
   (b) Írjuk fel $T > T_0$ hőmérsékleten, $0 < \beta\,|\mu| \ll 1$ kémiai potenciál mellett a részecskeszámot mint energiaintegrált! Segítség: $0 \leq x \ll 1$ esetén $\displaystyle\int \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^{t+x} - 1}\mathrm{d}t \approx \Gamma(s)\,\zeta(s) + \Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,x^{s-1}$ félegész $s > 1$-re. Figyelem: $\mu < 0$.
   (c) Írjuk fel T_0 hőmérsékleten is a részecskeszámot, ahol ahol már épp $\mu = 0$!
   (d) A két részecskeszám egyenlőségéből fejezzük ki μ-t $\dfrac{T}{T_0}$-lal (előjelhelyesen!).
   (e) Hogy változik a kémiai potenciál, ha $T < T_0$?
3. Vizsgáljuk meg a szilárdtestekben a fononok termodinamikai tulajdonságait Debye-közelítésben ideális bozongázként! Diszkutáljuk mind az alacsony, mind a magas hőmérsékletű határesetet!
   (a) Hogyan értelmezhetjük a fononok rezgéseit lineáris közelítésben?
   (b) Adjuk meg az állapotsűrűséget!
   (c) Vizsgáljuk meg az átlagos energiát és a hőkapacitást!
   (d) Diszkutáljuk a magas és alacsony hőmérsékletű határesetet!
   (e) Mekkora a fonongáz nyomása és izoterm kompresszibilitása?
   (f) Miért nincs a fonongázban Bose-kondenzáció?

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Vizsgáljuk meg, van-e Bose–Einstein-kondenzáció V térfogatba zárt háromdimenziós ultrarelativisztikus ideális bozongáz esetén!
   (a) Írjuk fel a $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget!
   (b) Írjuk fel a részecskeszámot mint energiaintegrált általánosan, T hőmérséklet és μ kémiai potenciál mellett!
   (c) Vizsgáljuk meg az energiaintegrált μ-függés szerint! Adott hőmérsékleten milyen μ esetén lesz maximális az integrál értéke? Véges-e ez az érték? (Tipp: vizsgáljuk meg az energiaintegrált egy kicsi véges intervallumon, ahol esetleg divergenciát várunk, és itt fejtsük sorba az integrandust!)
   (d) Ennek tükrében mit mondhatunk a Bose–Einstein-kondenzáció esetleges jelenlétéről? A választ indokoljuk!
2. Vizsgáljuk meg a háromdimenziós nemrelativisztikus Bose-gáz hőkapacitásának hőmérsékletfüggését a T_0 kondenzációs hőmérséklet körül!
   (a) Írjuk fel a $\varrho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget!
   (b) Írjuk fel $T < T_0$ hőmérsékleten az $\langle E\rangle$ átlagos energiát az energiaintegrálból! Figyelem: $\mu = 0$!

(c) Írjuk fel $T \geq T_0$ hőmérsékleten, $0 < \beta\,|\mu| \ll 1$ kémiai potenciál mellett az átlagos energiát! Segítség: $0 \leq x \ll 1$ esetén $\displaystyle\int \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^{t+x}-1}\mathrm{d}t \approx \Gamma(s)\,\zeta(s) - \Gamma(s)\,\zeta(s-1)\,x + \Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,x^{s-1}$ félegész $s > 1$-re, ahol s-től függően a nulladrenden túl csak a legalacsonyabb rendű tagot hagyjuk meg. Figyelem: $\mu < 0$.

(d) Határozzuk meg a hőkapacitás mindkét oldali határátmenetét $T = T_0$-ban! Folytonos-e az átalakulási pontban?

(e) Folytonos-e a $\dfrac{\partial C_V}{\partial T}$ meredekség T_0-ban?

3. Vizsgáljuk meg a háromdimenziós nemrelativisztikus Bose-gáz izoterm kompresszibilitásának hőmérsékletfüggését a T_0 kondenzációs hőmérséklet felett, annak közelében! Nagykanonikus sokaságban ezt meghatározhatjuk a részecskeszám fluktuációiból: $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{N,T} = \dfrac{V}{N^2}\left(\dfrac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{V,T}$.

(a) Írjuk fel a $\varrho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget!

(b) Írjuk fel $T > T_0$ hőmérsékleten, $0 < \beta\,|\mu| \ll 1$ kémiai potenciál mellett a részecskeszámot mint energiaintegrált!

(c) Határozzuk meg a részecskeszámot $|\mu|$-ben vezető rendig! Segítség: $0 \leq x \ll 1$ esetén $\displaystyle\int \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^{t+x}-1}\mathrm{d}t \approx \Gamma(s)\,\zeta(s) + \Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,x^{s-1}$ félegész $s > 1$-re. Figyelem: $\mu < 0$.

(d) Határozzuk meg az izoterm kompresszibilitást! Tudván, hogy $\mu \approx c\,(T - T_0)^2$ ha $T \approx T_0$, milyen a kompresszibilitás hőmérsékletfüggése? Mi történik, ha $T \to T_0$?