

## 8. statisztikus fizika gyakorlat

2023. május 8.

- Határozzuk meg a nem relativisztikus  $S$  spinű, fermionikus ideális kvantumgáz állapotegyenletének, kémiai potenciáljának és nyomásának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!
  - Határozzuk meg az energia-állapotsűrűséget!
  - Írjuk fel az átlagos részecskeszámot meghatározó integrált!
  - Fejezzük ki a kémiai potenciált a részecskesűrűséggel a klasszikus limeszben!
  - Fejtsük sorba vezetőrendben az átlagos részecskeszámot a klasszikus limesz körül  $e^{\beta\mu}$  szerint!
  - Innen pedig határozzuk meg a kémiai potenciál sorfejtését vezetőrendben a klasszikus limesz körül az  $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$  részecskesűrűség függvényében!
  - Ismételjük meg a fenti sorfejtést a nagykanonikus potenciál esetén is az előző feladatban levezetett összefüggés segítségével!
  - Ennek segítségével határozzuk meg a nyomás kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest a részecskesűrűség függvényében!
  - Tegyük ezt meg az átlagos energiára is!
  - Határozzuk meg a kettő hányadosából az állapotegyenletet és annak kvantumkorrekcióit!
- A grafén egy kétdimenziós, tiltott sáv nélküli félvezető. Megmutatható (például szoros kötésű közelítést felhasználva), hogy a Brillouin-zónában két nemekvivalens Dirac-pont van, amelyekben az energiasávok csúcuknál illeszkedő kúpokat alkotnak, azaz a diszperzió lineáris:  $|\varepsilon(\mathbf{p})| = c|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$  (a  $c$  meredekség mindkét Dirac-pontban ugyanaz). A semleges grafénben a Fermi-energia a Dirac-pontoknak megfelelő 0 energián van (a Fermi-energia alatti alsó elektronsáv teljesen be van töltve). Külső feszültség hatására azonban elektronok jelennek meg a felső sávban, azaz a Fermi-energia pozitív lesz. Az ennek a sávstruktúrának megfelelő kétdimenziós ultrarelativisztikus elektrongázt vizsgáljuk alacsony hőmérsékleten.
  - Alapállapotban az  $\varepsilon_F = 0$  Fermi-energiáig töltve van minden állapot. Mi történik kvalitatíven a betöltésekkel, ha elkezdjük megemelni a hőmérsékletet?
  - Egyetlen  $\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$  sávot figyelembe véve mekkora az  $\varepsilon$  energiájú állapot degenerációja?
  - Határozzuk meg a  $\rho(\varepsilon)$  állapot-sűrűséget! Milyen az energiafüggés?
  - Határozzuk meg nulla hőmérsékleten a kémiai potenciál (Fermi-energia) és a felső sávban lévő elektronsűrűség közötti kapcsolatot!
  - Ismételjük át a Bethe-Sommerfeld sorfejtés lépéseit!
  - A részecskeszámra felírt Bethe-Sommerfeld-sorfejtésből határozzuk meg a kémiai potenciál hőmérsékletfüggését  $k_B T \ll \mu$  esetén!
  - Határozzuk meg az átlagos energia hőmérsékletfüggését!
  - Határozzuk meg az alacsony hőmérsékleti kőkapacitást! Milyen a hőmérsékletfüggés?
- (Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitás) Tekintsük a háromdimenziós (és nem relativisztikus) szabad elektrongázt külső  $B$  mágneses térben!
  - Írjuk fel ( $z$  irányú mágneses teret feltételezve) a kétféle spinvetületű elektronok  $E_{\pm}$  energiáját!
  - Határozzuk meg adott hőmérséklet és kémiai potenciál mellett a kétféle spinvetületű elektronok  $N_{\pm}$  darabszámát!
  - Számoljuk ki az  $M$  átlagos mágnesezettséget!
  - Magas hőmérsékleten milyen a  $\chi$  szuszceptibilitás hőmérsékletfüggése?
  - Mit mondhatunk ugyanerről alacsony hőmérsékleten?

---

### Példák otthoni gyakorlásra:

- Határozzuk meg az állapot-sűrűséget  $d$  dimenzióban  $\varepsilon = \sqrt{(\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2}$  diszperziós reláció esetén.

2. Lássuk be, hogy ideális bozonikus kvantumgázban, háromdimenzióban és kvadratikus diszperziós reláció esetén,  $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ , a nagykanonikus potenciál felírható a betöltési szám és az integrált állapotsűrűség segítségével az alábbi módon:

$$\Phi = - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon b(\varepsilon) R(\varepsilon), \quad (1)$$

ahol  $R(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \rho(\varepsilon')$ , illetve  $b(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$  a Bose függvény.

3. Határozzuk meg a nem relativisztikus  $S$  spinű, bozonikus ideális kvantumgáz állapotegyenletének, kémiai potenciáljának és nyomásának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!

- Határozzuk meg az energia-állapotsűrűséget!
- Írjuk fel az átlagos részecskeszámot meghatározó integrált!
- Fejtsük ki a kémiai potenciált a részecskesűrűséggel a klasszikus limeszben.
- Fejtsük sorba vezetőrendben az átlagos részecskeszámot a klasszikus limesz körül a  $e^{\beta\mu}$  szerint.
- Innen pedig határozzuk meg a kémiai potenciál sorfejtését vezetőrendi a klasszikus limesz körül a  $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$  részecskesűrűség függvényében.
- Ismételjük meg a fenti sorfejtést a nagykanonikus potenciál esetén is az előző feladatban levezetett összefüggés segítségével
- Ennek segítségével határozzuk meg a nyomás kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest a részecskesűrűség függvényében.
- Tegyük ezt meg az átlagos energiára is!
- Határozzuk meg a kettő hányadosából az állapotegyenletet és annak kvantumkorrekcióit!

4. Határozzuk meg a *háromdimenziós* kvadratikus diszperziójú,  $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ , Fermi-gáz esetén a következő termodinamikai mennyiségeket,  $T = 0$  hőmérsékleten:

- Határozzuk meg a  $\rho(\varepsilon)$  állapotsűrűséget!
- Ennek segítségével számoljuk ki az  $N$  átlagos részecskeszámot a kémiai potenciál függvényében!
- Hasonló módon eljárva adjuk meg az átlagos energiát a kémiai potenciál függvényében!
- Határozzuk meg az előadáson tanultak alapján a  $\mathcal{Z}$  nagykanonikus állapotösszeget (Segítség: Először írjuk fel az egyes energianívokhoz,  $j$  kvantumszámokhoz tartozó  $\mathcal{Z}_j$  nagykanonikus állapotösszeget, majd ennek segítségével írjuk fel a teljes állapotösszeget)!
- Ebből adjuk meg a  $\Phi(T, V, \mu)$  nagykanonikus potenciált, amit fejtsük ki az energia szerinti  $\rho(\varepsilon)$  állapotsűrűséget tartalmazó integrál segítségével!
- Határozzuk meg a nyomást és a kompresszibilitást!

5. Egy elektronrendszert mágneses tér hiányában a  $\rho(\varepsilon)$  állapotsűrűség írja le.  $H$  mágneses tér bekapcsolása esetén a kétféle spin energiája felhasad  $\pm\mu_B H$  energiával, így a kétféle spinszatorna állapotsűrűsége  $\rho_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\rho(\varepsilon \mp \mu_B H)$  lesz. Mutassuk meg, hogy a Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitás

$$\chi_P = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \mu_B^2 \int \rho'(\varepsilon) \langle n(\varepsilon) \rangle d\varepsilon.$$

Tipp: határozzuk meg a kétféle spinű elektronok  $\langle N_{\pm} \rangle$  számát, majd ebből az  $M = -\mu_B (\langle N_+ \rangle - \langle N_- \rangle)$  mágneszettséget a  $H \rightarrow 0$  limeszben!