8. statisztikus fizika gyakorlat

2023. május 8.

1. Határozzuk meg az állapotsűrűséget d dimenzióban, $\varepsilon = c\,|\mathbf{p}|^{\gamma}$ diszperziós reláció esetén, $\gamma > 0$.

2. Lássuk be, hogy ideális fermionikus kvantumgázban, háromdimenzióban és kcadratikus diszperziós reláció esetén, $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$, a nagykanonikus potenciál felírható a betöltési szám és az integrált állapotsűrűség segítségével az alábi módon:
$$\Phi = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, f(\varepsilon)\, R(\varepsilon)\,, \tag{1}$$
ahol $R(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon'\, \rho(\varepsilon')$.

3. Határozzuk meg a nem relativisztikus S spinű, fermionikus ideális kvantumgáz állapotegyenletének, kémiai potenciáljának és nyomásának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!
   (a) Határozzuk meg az energia-állapotsűrűséget!
   (b) Írjuk fel az átlagos részecskeszámot meghatározó integrált!
   (c) Fejezzük ki a kémiai potenciált a részecskesűrűséggel a klasszikus limeszben!
   (d) Fejtsük sorba vezetőrendben az átlagos részecskeszámot a klasszikus limesz körül $e^{\beta\mu}$ szerint!
   (e) Innen pedig határozzuk meg a kémiai potenciál sorfejtését vezetőrendben a klasszikus limesz körül az $n = \frac{\langle N\rangle}{V}$ részecskesűrűség függvényében!
   (f) Ismételjük meg a fenti sorfejtést a nagykanonikus potenciál esetén is az előző feladatban levezetett összefüggés segítségével!
   (g) Ennek segítségével határozzuk meg a nyomás kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest a részecskesűrűség függvényében!
   (h) Tegyük ezt meg az átlagos energiára is!
   (i) Határozzuk meg a kettő hányadosából az állapotegyenletet és annak kvantumkorrekcióit!

4. (Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitás) Tekintsük a háromdimenziós (és nem relativisztikus) szabad elektrongázt külső B mágneses térben!
   (a) Írjuk fel (z irányú mágneses teret feltételezve) a kétféle spinvetületű elektronok $E_{\pm}$ energiáját!
   (b) Határozzuk meg adott hőmérséklet és kémiai potenciál mellett a kétféle spinvetületű elektronok $N_{\pm}$ darabszámát!
   (c) Számoljuk ki az M átlagos mágnesezettséget!
   (d) Magas hőmérsékleten milyen a χ szuszceptibilitás hőmérsékletfüggése?
   (e) Mit mondhatunk ugyanerről alacsony hőmérsékleten?

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Határozzuk meg az állapotsűrűséget d dimenzióban $\varepsilon = \sqrt{(\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2}$ diszperziós reláció esetén.

2. Lássuk be, hogy ideális bozonikus kvantumgázban, háromdimenzióban és kvadratikus diszperziós reláció esetén, $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$, a nagykanonikus potenciál felírható a betöltési szám és az integrált állapotsűrűség segítségével az alábi módon:
$$\Phi = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, b(\varepsilon)\, R(\varepsilon)\,, \tag{2}$$
ahol $R(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \mathrm{d}\varepsilon'\, \rho(\varepsilon')$, illetve $b(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$ a Bose függvény.

3. Határozzuk meg a nem relativisztikus S spinű, bozonikus ideális kvantumgáz állapotegyenletének, kémiai potenciáljának és nyomásának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!
   (a) Határozzuk meg az energia-állapotsűrűséget!
   (b) Írjuk fel az átlagos részecskeszámot meghatározó integrált!
   (c) Fejezzük ki a kémiai potenciált a részecskesűrűséggel a klasszikus limeszben.
   (d) Fejtsük sorba vezetőrendben az átlagos részecskeszámot a klasszikus limesz körül a $e^{\beta\mu}$ szerint.
   (e) Innen pedig határozzuk meg a kémiai potenciál sorfejtését vezetőrendi a kalsszikus limesz körül a $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$ részecskesűrűség függvényében.
   (f) Ismételjük meg a fenti sorfejtést a nagykanonikus potenciál esetén is az előző feladatban levezetett összefüggés segítségével
   (g) Ennek segítségével hatáorzzuk meg a nyomás kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest a részecskesűrűség függvényében.
   (h) Tegyük ezt meg az átlagos energiára is!
   (i) Határozzuk meg a kettő hányadosából az állapotegyenletet és annak kvantumkorrekcióit!

4. Határozzuk meg a *háromdimenziós* kvadratikus diszperziójú, $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$, Fermi-gáz esetén a következő termodinamikai mennyiségeket, $T = 0$ hőmérsékleten:
   (a) Határozzuk meg a $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget!
   (b) Ennek segítségével számoljuk ki az N átlagos részecskeszámot a kémiai potenciál függvényében!
   (c) Hasonló módon eljárva adjuk meg az átlagos energiát a kémiai potenciál függvényében!
   (d) Határozzuk meg az előadáson tanultak alapján a $\mathcal{Z}$ nagykanonikus állapotösszeget (Segítség: Először írjuk fel az egyes energianívókhoz, j kvantumszámokhoz tartozó $\mathcal{Z}_j$ nagyaknaonikus állapotösszeget, majd ennek segítségével írjuk fel a teljes állapotösszeget)!
   (e) Ebből adjuk meg a $\Phi(T, V, \mu)$ nagykanonikus potenciált, amit fejezzünk ki az energia szerinti $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűséget tartalmazó integrál segítségével!
   (f) Határozzuk meg a nyomást és a kompresszibilitást!

5. Egy elektronrendszert mágneses tér hiányában a $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűség írja le. H mágneses tér bekapcsolása esetén a kétféle spin energiája felhasad $\pm\mu_\mathrm{B} H$ energiával, így a kétféle spincsatorna állapotsűrűsége $\rho_\pm(\varepsilon) = \frac{1}{2}\rho(\varepsilon \mp \mu_\mathrm{B} H)$ lesz. Mutassuk meg, hogy a Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitás
$$\chi_\mathrm{P} = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} = \mu_\mathrm{B}^2 \int \rho'(\varepsilon)\, \langle n(\varepsilon) \rangle\, \mathrm{d}\varepsilon.$$
Tipp: határozzuk meg a kétféle spinű elektronok $\langle N_\pm \rangle$ számát, majd ebből az $M = -\mu_B\left(\langle N_+ \rangle - \langle N_- \rangle\right)$ mágnesezettséget a $H \to 0$ limeszben!