4. statisztikus fizika gyakorlat

2023. március 27.

1. Határozzuk meg V térfogatban elhelyezkedő N darab megkülönböztethetetlen részecskéből álló klasszikus ideális gáz
   (a) $Z(T, N)$ állapotösszegét
   (b) Számoljuk ki pár reális esetben a termikus de-Broglie hullámhosszt:
      - O_2 molekula: $T = 1K$, $273K$ $r_s = 0.152nm$
      - Hidrogén atom: $T = 100K$, $r_s = 0.12nm$
      - elektron: $T = 1K$, $r_s = 0.0000028nm$

   (c) $F(T, V, N)$ szabadenergiáját,
   (d) $S(T, N)$ entrópiáját
   (e) $\langle E\rangle$ átlagos energiáját és
   (f) C_V hőkapacitását

   kanonikus sokaságban!

2. Határozzuk meg klasszikus harmonikus oszcillátorra T hőmérsékleten
   (a) a $Z(T)$ kanonikus állapotösszeget,
   (b) a $\rho(x, p)$ kanonikus eloszlást,
   (c) Határozzuk meg a $\rho(x)$ hely szerinti marginális eloszlást!
   (d) Ebből határozzuk meg az $\left\langle x^2\right\rangle$ és
   (e) az $\left\langle x^4\right\rangle$ várhatóértékeket

3. Tekintsük két részecske dinamikáját T hőmérsékleten kanonikus sokaságban, melyek D állandójú rugóval két falhoz vannak rögzítve és egymással is ugyanekkora erejű rugóval vannak összekapcsolva.
   (a) Írjuk fel a renddszer Hamilton-függvényét a két részecske relativ és tömegközépponti koordinátájának, x és X, függvényében és az ezelhez assszociált, p és P kanonikus impulzusok függvényébne
   (b) Határozzuk meg a $Z(T)$ állapotösszeget,
   (c) Határozzuk meg a $\rho\left(x, X, p, P\right)$ kanonikus eloszlást!
   (d) Ebből adjuk meg az energia várhatóértékét!
   (e) Határozzuk meg a koordináta szerinti marginális eloszlást, $\rho\left(x, X\right)$.
   (f) Ebből adjuk meg az $\left\langle x^2\right\rangle$ és $\left\langle x^4\right\rangle$ várhatóértékeket!

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Határozzuk meg V térfogatban elhelyezkedő N darab megkülönböztethetetlen részecskéből álló klasszikus ideális gáz
   (a) $Z(T, N)$ állapotösszegét,
   (b) $F(T, V, N)$ szabadenergiáját,
   (c) p nyomását,
   (d) $\left\langle \delta E^2\right\rangle$ energia-szórásnégyzetét és határozzuk meg az energia relatív bizonytalanságát, $\frac{\sqrt{\langle \delta E^2\rangle}}{\langle E\rangle}$!

2. Határozzuk meg klasszikus harmonikus oszcillátorra T hőmérsékleten
   (a) a $Z(T, N)$ kanonikus állapotösszeget,
   (b) a $\rho(x, p)$ kanonikus eloszlást,
   (c) az $\left\langle x^2 p^2\right\rangle$ és
   (d) a $\left\langle p^4\right\rangle$ átlagértéket!

3. Egy R hosszú klasszikus gömbinga mozgását leíró Hamilton-függvény

$$\mathcal{H}(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sin^2\vartheta} - mgR\cos\vartheta,$$

ahol $\vartheta = 0$ "polárszög" felel meg az egyensúlyi helyzetnek.

(a) Számítsuk ki a $Z(T, N)$ kanonikus állapotösszeget T hőmérséklet mellett!

(b) Írjuk fel a $\rho(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$ kanonikus sűrűséget!

(c) Határozzuk meg a centrumhoz képesti függőleges kitéréssel, z -vel bezárt szög szerinti marginális eloszlást, $P(\theta)$!

(d) Írjuk fel a centrumhoz képesti függőleges kitérés $P(z)$ marginális eloszlását és rajzoljuk fel ezt az eloszlást! (*Segítség*: mutassuk meg, hogy az eredmény $P(\theta) \sim \sin\theta\, e^{-\beta mgR\cos\theta}$, illetve $P(z) \sim e^{-\beta mgRz}\, \mathbb{I}\,[-R, R]$)

(e) Határozzuk meg az F szabadenergiát (*Segítség*: az eredmény $F \sim -k_B T \ln\Big((k_B T)^2 \sinh(\beta mgR)\Big)$),

(f) az S entrópiát,

(g) az $\langle E\rangle$ átlagos enegiát és a C_V hőkapacitást!