

3. statisztikus fizika gyakorlat

1. N darab megkülönböztethető klasszikus lineáris harmonikus oszcillátor

Ismétlés: A legfeljebb E energiával rendelkező állapotok számának, $\Omega_T(E)$ kiszámítása:

$$\Omega_T(E) = \frac{1}{\text{kombinatorikai faktor}} \int_{\mathcal{H} \leq E} \prod_{i=1}^N \frac{d^{f_i} p_i d^{f_i} q_i}{h^{f_i}}. \quad (1)$$

Ahol f_i az i . részecske szabadsági fokainak száma, illetve a kombinatorikai faktort az adott probléma határozza meg, például N darab megkülönböztethetetlen részecske esetén $N!$, míg megkülönböztethető részecskék esetén 1 , továbbá az integrált minden szabadsági fokhoz rendelt $p_i^{f_i}$ impulzusra, illetve $q_i^{f_i}$ koordinátára végezzük el ($\int d^{f_i} p_i d^{f_i} q_i$ kifejezés jelentése, hogy az i -edik részecskéhez tartozó f_i darab impulzus- és koordináta komponensre integrálunk, részletesen kiírva $\int d^{f_i} p_i \equiv \int \prod_{l=1}^{f_i} dp_i^l$, háromdimenzióban például $\int d^{f_i} p_i = \int dp_i^x dp_i^y dp_i^z$, $\int d^{f_i} q_i = \int dx dy dz$).

(a) Állapotszám:

$$\Omega_T(E) = \frac{1}{h^N} \int_{\mathcal{H} < E} \prod_{i=1}^N dp_i dx_i = \frac{1}{h^N} \int_{\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2mE} + \frac{x_i^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} < 1} d^N p_i d^N x_i. \quad (2)$$

A (2)-es egyenletben megjelenő integrál egy $2N$ dimenziós ellipszoid térfogata, mely N darab $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, illetve $b = \sqrt{2mE}$ hosszúságú tengellyel rendelkezik. Az N dimenziós gömb esetével analóg módon, az eredmény (levezetés nélkül):

$$\Omega_T(E) = \frac{\Theta_{2N}}{h^N} a^N b^N = \frac{\pi^N}{h^N \Gamma(N+1)} a^N b^N = \left(\frac{2\pi E}{h\omega}\right)^N \frac{1}{\Gamma(N+1)} = \left(\frac{E}{h\omega}\right)^N \frac{1}{\Gamma(N+1)}, \quad (3)$$

ahol látható módon majdnem ugyanazt kaptuk mint a $2N$ dimenziós gömb esetén, csak most a $2N$ dimenziós $\Theta_{2N} = \frac{\pi^N}{\Gamma(2N)}$ térszöveget R^{2N} helyett $a^N b^N$ -el szoroztuk be, ellipsziszról lévén szó, illetve látható, hogy a (3)-as kifejezés az $a = b$ esetben éppen a $2N$ dimenziós gömb térfogatát adja vissza. Alkalmazva a Stirling-formula logaritmikus alakját az állapotszám logaritmusára, a következőt kapjuk:

$$\ln(\Omega_T(E)) \approx N \ln\left(\frac{2\pi E}{h\omega}\right) - N \ln(N/e) = N \ln\left(\frac{2\pi E e}{h\omega N}\right) \equiv N\varphi\left(\frac{E}{N}\right). \quad (4)$$

Látható, hogy normálrendszeréről van szó, hiszen a részecskeszámot növelve, rögzített, fix $\frac{E}{N}$ energia sűrűség mellett, az állapotszám logaritmus is növekszik. Pontosabban, az állapotszám meredeken, exponenciálisan növekszik a részecskeszámmal. A korábban tanultak alapján, ekkor az E energiához tartozó állapotok száma egy "exponenciálisan gyenge" faktor erejéig megegyezik az összes, legfeljebb E energiával rendelkező állapotok számával, vagyis $\Omega_{\delta E}(E) \approx \Omega_T(E)$. Részletesebben kifejezve ez onnan látható, hogy $\Omega_T(E)$ jelen esetben egy $2N \gg 1$ dimenziójú ellipszoid térfogatával egyezik meg, így a $2N$ dimenziós gömb esetén bizonyított állítással analóg módon az ellipszoid térfogata jól közelíthető annak δE vastagságú héjával, ha $\delta E > \frac{E}{N}$.

(b) Entrópia:

Az (a) feladat érvelései alapján az entrópia $S = k_B \ln(\Omega_{\delta E}(E)) \approx k_B \ln(\Omega_T(E))$, vagyis

$$S = k_B N \ln\left(\frac{2\pi E e}{h\omega N}\right) \equiv k_B N \varphi\left(\frac{E}{N}\right), \quad (5)$$

ahol ismét az utolsó felírás indikálja, hogy normálrendszeréről van szó, hiszen az entrópia lineárisan nő a részecskeszámmal (extenzív állapotjelző) rögzített $\frac{E}{N}$ arány mellett.

- (c) Hőmérséklet:
Ismétlés: Termodinamika első főtétele:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \quad (6)$$

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} - \frac{\mu dN}{T}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N}, \quad (8)$$

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N}, \quad (9)$$

$$\frac{\mu}{T} = - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V}. \quad (10)$$

Ahol az egyenletet először dS -re rendeztük, majd a zárójelek alsó indexeiben feltüntetett extenzív változók rögzítése mellett vettük az entrópia megváltozását az adott változók szerint!

Hőmérséklet definíciója mikrokanonikus sokaságban:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k_B N \frac{\partial}{\partial E} \ln(E) = \frac{k_B N}{E}, \quad (11)$$

ahol kihasználva a logaritmus additivitását minden egyéb tagot elhagyhattunk a logaritmuson belül a (5)-ös összefüggésben.

Végeredményben a

$$T = \frac{E}{k_B N} \quad (12)$$

eredmény adódik, ami megfelel az ekvipartíció tételének, vagyis szabadsági fokként $\frac{1}{2}k_B T$ járulékkal nő a rendszer energiája.

- (d) Kémiai potenciál:

A kémiai potenciál kiszámításához az entrópia N részecskeszám szerinti deriváltjára van szükségünk:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V} = k_B \ln \left(\frac{2\pi E e}{h\omega N} \right) - k_B = k_B \ln \left(\frac{2\pi E}{h\omega N} \right) \rightarrow \mu = \frac{E}{N} \ln \left(\frac{h\omega N}{2\pi E} \right). \quad (13)$$

2. N db kvantumos lineáris harmonikus oszcillátor

Határozzuk meg N darab kvantumos harmonikus lineáris oszcillátor

- $\Omega(E, N)$ állapotszámát,
- S entrópiáját,
- T hőmérsékletét,
- C_V hőkapacitását!

- (a) Állapotszám:

Eddig klasszikus rendszereket vizsgáltunk, ahol az

$$\Omega_{\delta E}(E) = \frac{1}{\text{kombinatorikai faktor}} \int_{E-\delta E \leq \mathcal{H} \leq E} \prod_{i=1}^N \frac{d^{f_i} p_i d^{f_i} q_i}{h^{f_i}} \quad (14)$$

módon definiált mennyiség adta meg az E energiájú állapotok számát. Klasszikus rendszerek esetén az energiaértékek folytonosan helyezkednek el, emiatt bevezettük a δE energiafluktuációval azonosított mennyiséget, melynek segítségével ki tudtuk számolni az állapotszámot, illetve a különböző mérhető fizikai mennyiségek kumulánsait ($\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ stb...) az $[E - \delta E, E]$ energia ablakban, amiket δE függvényében adtunk meg, majd a kapott kifejezésben vettük a $\delta E \rightarrow 0$ hatéresetet, megkapván így az E energiájú állapotok számát.

Most **kvantum**os rendszereket tekintünk, **diszkrét**, **kvantált** energiaszintekkel, melyek degenerációja adja meg az adott energián lévő állapotok számát (ez a degeneráció definíciója tulajdonképpen, vagyis, hogy hány *különböző* kvantummechanikai állapot rendelkezik ugyanazzal az energiával)!

Általában ezeket a problémákat egyszerűbb kezelni, mivel az adott \mathcal{H} Hamilton operátornak a sajátállapotai megfeleltethetőek a rendszer mikroállapotainak a korábbi klasszikus tárgyalásmód fázistérbeli $d^{f_i} p_i d^{f_i} q_i$ elemi fáziscelláival ellentétben, azaz

$$\mathcal{H}|\mu\rangle = E_\mu|\mu\rangle, \quad (15)$$

ahol $|\mu\rangle$ az adott mikroállapot és E_μ a hozzátartozó energia. Illetve a fázistér felváltja a Hilbert-tér, vagyis a mikroállapotokat leíró vektorok lineáris tere, továbbá a fázistérbeli mozgást leíró Hamilton-egyenleteket felváltja a Hilbert térben való időfejlődést megadó Schrödinger egyenlet:

$$\dot{p}_i^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_i^\alpha}, \quad \dot{q}_i^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad (16)$$

ahol α indexeli az i -ik részecske impulzus és hely komponenseit. A fizikai mennyiségek várhatóértékének tekintetében is egy új definíciót kell bevezetünk, mivel a sokaság átlagon felül vennünk kell a fizikai mennyiségeket reprezentáló operátorok kvantummechanikai várhatóértékét is, azaz

$$\bar{F} = \sum_{\mu} p_{\mu} \langle \mu | \hat{F} | \mu \rangle \equiv \langle \langle F \rangle \rangle \quad (17)$$

ami az ergodicitás felétele alóján egyenlő lesz az időátlaggal, azaz

$$\bar{F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \langle \hat{F} \rangle(t), \quad \langle \hat{F} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{F} | \psi(t) \rangle \quad (18)$$

mivel p_{μ} csak az E_{μ} energiáktól függ, hiszen

$$\Omega(E_{\mu}) \equiv \#|\mu\rangle, \quad p_{\mu} = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)}, & \text{ha } E = E_{\mu} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (19)$$

érvényben marad az egyenlő valószínűségek elve!
 N darab harmonikus oszcillátor esetén:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}_i^2 \\ E_{\{n_i\}} &= \sum_{i=1}^N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + n_i \right) = \hbar \omega \frac{N}{2} + \hbar \omega \sum_{i=1}^N n_i \equiv \hbar \omega \frac{N}{2} + \hbar \omega M \equiv E(M), \end{aligned} \quad (20)$$

ahol bevezettük az M paramétert, ami jellemzi egy adott $\{n_i\}$ konfigurációhoz tartozó energiát, $E_{\{n_i\}} \leftrightarrow E(M)$. Vagyis az $\Omega(E(M))$ állapotszám nem más mint azon esetek száma, amikor $\sum_{i=1}^N n_i = M$, vagyis az $E_{\{n_i\}} = E(M)$ energiaszint degenerációja, **az E energiával rendelkező állapotok száma**.

Célunk az egyes harmonikus oszcillátorok energiaszínjeit jellemző $n_i = 0, 1, 2, \dots$ kvantumszámok megadása oly módon, hogy az összegük rögzített legyen, $\sum_{i=1}^N n_i = M$. Ez nem jelent mást, mint M darab $\hbar \omega$ energiakvantum szétosztását N darab részecske között, mindenféle megkötés nélkül (például előfordulhat az az eset, hogy egy tetszőleges $n_i = M$, míg az összes többi részecske az alapállapotban marad, $\{n_{k \neq i} = 0\}$; ahogyan az az eset is, hogy pontosan M darab részecske vesz fel $\hbar \omega$ energiát, míg a maradék $N - M$ darab marad az alapállapotban.) Ez a kombinatorikai modell éppen az N és M paraméterekkel jellemzett ismétléses kombinációnak felel meg. Vagyis az állapotszám egy N és M paraméterű ismétléses kombináció segítségével adható meg:

$$\begin{aligned} \Omega(E(M)) &= \binom{N-1+M}{M}, \quad M \in \mathbb{N}, \\ \Omega(E(M)) &= 0, \quad \text{egyébként.} \end{aligned} \quad (21)$$

(b) Entrópia:

A szokásos definíció mikrokanonikus sokaságban:

$$S(E(M), N) = k_B \ln(\Omega(E(M))). \quad (22)$$

Megjegyzés: Most nincs szükségünk a δE energia bizonytalanság bevezetésére, mivel a jól meghatározott **diszkrét** energiaértékeknek meg tudtuk adni a degenerációját/a hozzá tartozó **állapotszámokat**. Alkalmazva a Stirling-formula logaritmikus alakját $N, M \gg 1$ nagy értékeire:

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{(N-1+M)!}{M!(N-1)!}\right) \approx \\ & \approx (N-1+M)\ln(N-1+M) - (N-1+M) - (N-1)\ln(N-1) + (N-1) - M\ln(M) + M = \\ & = (N-1+M)\ln(N-M) - (N-1)\ln(N-1) - M\ln(M) \approx \\ & \approx (N+M)\ln(N+M) - N\ln(N) - M\ln(M). \end{aligned} \quad (23)$$

Illetve kifejezve az M paramétert a (20)-es egyenlet alapján az energia függvényében, $M = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}$, a következőt kapjuk az entrópiára:

$$S = k_B \left\{ \left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2} \right) \ln\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2} \right) - \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2} \right) \ln\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2} \right) - N \ln(N) \right\}. \quad (24)$$

(c) Hőmérséklet:

Definíció alapján, mikrokanonikus sokaságban, ahol bevezetjük az egyszerűbb jelölés érdekében az $x = \frac{E}{\hbar\omega}$ változót:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial x} [(x+N/2)\ln(x+N/2) - (x-N/2)\ln(x-N/2)] = \\ &= \frac{k_B}{\hbar\omega} [\ln(x+N/2) + 1 - \ln(x-N/2) - 1] = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{E/\hbar\omega + N/2}{E/\hbar\omega - N/2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Ha átrendezzük az összefüggést az energiára, a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} \frac{E/\hbar\omega + N/2}{E/\hbar\omega - N/2} &= \exp(\beta\hbar\omega) \rightarrow \frac{E}{\hbar\omega} [1 - \exp(\beta\hbar\omega)] = -\frac{N}{2} [1 + \exp(\beta\hbar\omega)] \rightarrow \\ \rightarrow E &= \frac{N\hbar\omega \exp(\beta\hbar\omega) + 1}{2 \exp(\beta\hbar\omega) - 1} \rightarrow E = N\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

ahol $\beta = \frac{1}{k_B T}$ az inverz hőmérséklet.

(d) Hőkapacitás:

Definíció alapján, használva az energiára kapott kifejezést, (26)-as egyenlet, ahol áttérünk a β változó szerinti deriválásra, $\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial\beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial\beta} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial\beta}$, amivel kényelmesebben számolható ki a deriválás:

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left[N\hbar\omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right] = \\ &= Nk_B \hbar\omega \beta^2 \left[\frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \right] \rightarrow C_V = Nk_B \left(\frac{\beta\hbar\omega/2}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Érdekes ezek után megvizsgálni a nagy hőmérsékletű limeszt, $T \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$. Használva a jól ismert azonosságot, miszerint $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sinh(x)} = 1$, látható, hogy a nagy hőmérsékletű határesetben:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_V = Nk_B \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\beta\hbar\omega/2}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right)^2 = Nk_B, \quad (28)$$

ami megfelel a klasszikus határesetben érvényes Dulong–Petit-elvnek, ami szerint a hőkapacitás egyszerűen csak N darab részecske, egymástól **független** $\varepsilon = k_B T$ energiajárulékából ered.

Most megvizsgáljuk, hogy milyen alakú az első korrekciós tag a Dulong–Petit határesethez képest, ehhez vennünk kell $\left(\frac{x}{\sinh(x)} \right)^2$ sorfejtését vezetőrendben. A "szokásos" eljárás helyett (megnézzük a függvény deriváltjait és felírjuk a Taylor-sorát), egy gyorsabb módszert alkalmazunk és először a nevező hatványsorának első két tagját írjuk ki, $\sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{3!} + \dots$, beírva ezt a (27)-es egyenletbe az $x = \beta\hbar\omega/2$ megfeleltetéssel, kiegyesítségítve x -szel, illetve a nevezőt a jól ismert azonosság, $(1+x)^n \approx 1 + nx + \dots$, szerint vezetőrendig sorba fejtve, következőt kapjuk vezetőrendben:

$$\left(\frac{x}{x + \frac{x^3}{3!}} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!}} \right)^2 \approx \left(1 - \frac{x^2}{3!} \right)^2 \approx 1 - \frac{x^2}{3} \quad (29)$$

$$C_V = Nk_B \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \right) + o\left(\left(\frac{1}{T} \right)^4 \right) \approx Nk_B \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \right). \quad (30)$$

Izgalmas továbbá megvizsgálni az alacsony hőmérsékletű hatéresetet, $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$. Ekkor egyszerűen, mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$, a hőkapacitás eltűnik, míg az összenergia az N kvantumozó oszcillátor alapállapotú energiáját fogja visszaadni, $E = \frac{N\hbar\omega}{2}$. Ez egy tipikusan olyan tulajdonság, mely nagyon messze áll mindenféle klasszikus interpretációtól, klasszikusan soha nem kaphattuk volna ezt az eredményt. A jelenség hátterében természetesen a probléma kvantumozó eredete, a harmonikus oszcillátor energiaszintjeinek kvantáltsága áll. A teljesség kedvéért itt is megadjuk a vezetőrendbeli korrekciót:

Energia:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} - e^{-2x} + \dots \approx e^{-x} \quad (31)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} E \approx N\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + e^{-\beta\hbar\omega} \right). \quad (32)$$

Hőkapacitás:

$$\left(\frac{x}{\sinh(x)} \right)^2 = 4x^2 \frac{e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} = 4x^2 e^{-2x} - 8x^2 e^{-4x} + \dots \approx 4x^2 e^{-2x} \rightarrow \quad (33)$$

$$\rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} C_V \approx N (\beta\hbar\omega)^2 e^{-\beta\hbar\omega} k_B. \quad (34)$$

Az utóbbi eredményt úgy is megkaphattuk volna, ha csak egyszerűen deriváljuk az energia (31)-es egyenlet által megadott kifejezését.

(e*) Kémiai potenciál:

Definíció alapján, deriválva az entrópiára kapott kifejezést, (24)-os egyenlet:

$$-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N} = k_B \left(\frac{1}{2} \ln \left((E/\hbar\omega)^2 - (N/2)^2 \right) - \ln(N) \right). \quad (35)$$

Visszaírva a hőmérsékletre kapott eredményt, (25)-es egyenlet, azt kapjuk, hogy

$$\mu = \hbar\omega \frac{\ln \left((E/\hbar\omega)^2 - (N/2)^2 \right) - \ln(N)}{\ln(E/\hbar\omega - N/2) - \ln(E/\hbar\omega + N/2)}. \quad (36)$$

3. Két energiájú rendszer Egy részecske esetén a két lehetséges energia értéke, $0, \varepsilon$, míg az alapállapot nem degenerált, a gerjesztett állapot D -szere degenerációval bír, $D > 1$.

(a) Először adjuk meg az állapotszámot N részecske esetén. Ehhez paraméterezzük az energiát az alapján, hogy mennyi részecske található a gerjesztett állapotban, $E = N_+ \varepsilon$. Ekkor az összes ilyen állapot száma a következő képpen adható meg: annak kiválasztása, hogy N -ből N_+ rendelkezik ε energiával $\binom{N}{N_+}$ -féle képpen történhet, míg ezen belül D^{N_+} -féle képpen lehetséges a részecskéket elrendezni a degenerált szintek között. Tehát

$$\Omega(E, N) = \binom{N}{E/\varepsilon} D^{E/\varepsilon} \quad (37)$$

(b) Innen az entrópia:

$$S = k_B \ln \Omega(E, N) = k_B \ln \left[\binom{N}{E/\varepsilon} D^{E/\varepsilon} \right] = k_B \ln \left[\binom{N}{E/\varepsilon} \right] + k_B E/\varepsilon \ln D \quad (38)$$

Alkalmazva a Stirling formulát a következő adódik:

$$\begin{aligned} S &= k_B [N \ln N - N_+ \ln N_+ - N_- \ln N_- + k_B N_+ \ln D] \\ &= -k_B N \left[\frac{N_+}{N} \ln \left(\frac{N_+}{N} \right) + \frac{N_-}{N} \ln \left(\frac{N_-}{N} \right) - \frac{N_+}{N} \ln D \right] \\ &= -k_B N \left[\frac{E}{E_{\max}} \ln \left(\frac{E}{DE_{\max}} \right) + \left(1 - \frac{E}{E_{\max}} \right) \ln \left(1 - \frac{E}{E_{\max}} \right) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

ahol bevezettük a maximális energia kifejezését, amikor minden részecske a gerjesztett állapotban található, $E_{\max} = N\varepsilon$. Látható, hogy az eredmény, nem sokban különbözik a sima kétállapotú rendszertől, ahol $D = 1$.

- (c) Vizsgáljuk most meg, hogy hol éri el a maximumát ez a függvény, azaz, meddig igaz, hogy normálrendszer. ehhez vegyük az energia szerinti deriváltat és vegyük észre, hogy két szorzatból csak a logaritmusok deriválja éppen kiejtik egymást, a lineáris tagok deriváltjaiból pedig csak a logaritmusoknak marad energiafüggése:

$$\partial_E S \sim \ln \left(\frac{E}{D(E_{\max} - E)} \right) = 0 \rightarrow E^* = E_{\max} \frac{D}{D+1} = \frac{ND}{D+1} \varepsilon \quad (40)$$

azaz egy asszimmetrikus $N_+ = \frac{ND}{D+1} > 1/2$ betöltési számmal!

- (d) A hőmérséklethez a fenti eredménynt alakmazzuk kiírva a konstans tagokat is, ami változatlanok maradtak az entrópia kifejezéséhez képest:

$$\frac{1}{T} = \frac{Nk_B}{E_{\max}} \ln \left(\frac{D(E_{\max} - E)}{E} \right) \Rightarrow T = \frac{\varepsilon}{k_B} \frac{1}{\ln \left(\frac{D(E_{\max} - E)}{E} \right)} \quad (41)$$

Teljesen analóg módon a hőmérséklet az előző E^* -nél divergál, majd a nemnormálrendszer tartományba érve negatív értékeket vesz fel, $T(E > E^*) < 0$.

- (e) Vegyetül a hőkapacitást adjuk meg. Ehhez fejezzük ki az energiát a hőmérséklet függvényében

$$\frac{D(E_{\max} - E)}{E} = e^{\beta\varepsilon} \rightarrow E = \frac{DE_{\max}}{e^{\beta\varepsilon} + D} \quad (42)$$

Innen a hőmérséklet szerinti derivált, áttérve a $\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \beta} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial \beta}$:

$$C_V = -DE_{\max} \frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + D} = D \frac{E_{\max} \varepsilon}{T^2} \frac{e^{\beta\varepsilon}}{(e^{\beta\varepsilon} + D)^2} \quad (43)$$

Láthatóan mind $T \rightarrow \infty$ mind $T \rightarrow 0$ esetén eltűnik.