2. Statisztikus fizika gyakorlat

1. **Klasszikus lineáris harmonikus oszcillátor mikrokanonikus sokaságban**

   (a) Határozzuk meg a hely $\langle x^2 \rangle$ második momentumát.
   Először megadjuk az állapotszámot, ami definíció alapán:

$$\Omega_{\delta E}(E) = \frac{1}{h} \int_{E-\delta E < \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 < E} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}p \,. \tag{1}$$

Ez nem más, mint két ellipszis területének a különbsége $\sqrt{2mE}$, $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ illetve $\sqrt{2m(E-\delta E)}$, $\sqrt{\frac{2(E-\delta E)}{m\omega^2}}$ kis- és nagy tengelyekkel (egy a és b féltengelyű ellipszis területe πab):

$$\Omega_{\delta E}(E) = \frac{\delta E}{\hbar\omega} \,. \tag{2}$$

Definíció alapján az x^2 várható értéke:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{\Omega_{\delta E}(E)} \frac{1}{h} \int_{E-\delta E \le \mathcal{H} \le E} \mathrm{d}p \mathrm{d}x \; x^2 = \\ &\frac{1}{\Omega_{\delta E}(E)} \left(\frac{1}{h} \left(\int_{\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} \le 1} \mathrm{d}p \mathrm{d}x \; x^2 - \int_{\frac{p^2}{2m(E-\delta E)} + \frac{x^2}{\frac{2(E-\delta E)}{m\omega^2}} < 1} \mathrm{d}p \mathrm{d}x \; x^2 \right) \right) . \end{aligned} \tag{3}$$

Először érdemes általánosan megvizsgálni a kifejezést az $a = \sqrt{2mE}$ és $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ paraméterek segítségével:

$$\int_{\frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \le 1} \mathrm{d}p \mathrm{d}x \; x^2 = \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \; x^2 \int_{-a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} \mathrm{d}p = \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \; x^2 2a \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} , \tag{4}$$

ahol bevezetve a $\frac{x}{b} = \cos(t)$ új változót, a következő integrál adódik:

$$2b^3 a \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \; \sin^2 t \cos^2 t = \frac{\pi}{4} a b^3 \tag{5}$$

Behelyettesítve ismét a és b értékét mindkét integrálra, az alábbi kifejezés adódik az hely második momentumára:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\pi}{4\Omega_{\delta E(E)}} \left(\frac{4(E^2 - (E-\delta E))^2}{h m \omega^2} \right) = \frac{E}{m\omega^2} + \mathrm{o}(\delta E) \,, \tag{6}$$

ahol az utolsó lépésben $\delta E \to 0$ határesetet vettük.

Most kiszámítjuk egy másik módon is a második momentumot! A mikrokanonikus sűrűségfüggvény, ha nem akarunk bevezetni egy virtuális energia bizonytalanságot:

$$\varrho(x,p) = \mathcal{N} \delta \left[\mathcal{H}(x,p) - E \right] = \mathcal{N} \delta \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - E \right] . \tag{7}$$

Vagyis tetszőleges mennyiség, esetünkben a hely $\langle x^2 \rangle$ második momentuma kiszámítható a jól megszokott módon, azaz egyszerűen integráljuk a teljes fázistérre az $x^2 \varrho(x,p)$ kifejezést. Első lépésként meg kell határoznunk a normálási faktort:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]=1 \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,\frac{\delta(p+\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})+\delta(p-\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}/m}, \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \mathrm{d}x\,\frac{2m}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}}=\frac{2\pi}{\omega}\to\mathcal{N}=\frac{\omega}{2\pi}
\end{aligned} \tag{8}$$

ahol használtuk, hogy a Dirac deltára

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|},$$

ahol x_i az f függvény zérushelyei. Innen a várható érték:

$$\begin{aligned}
&\left\langle x^2\right\rangle=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,x^2\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]= \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,x^2\,\frac{\delta(p-\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})+\delta(p+\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}/m} \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \mathrm{d}x\,\frac{2mx^2}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}}=\frac{E}{m\omega^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

(b) Határozzuk meg az impulzus $\left\langle p^2\right\rangle$ második momentumát.
Teljesen analóg módon járunk el ebben az esetben, definíció alapján:

$$\begin{aligned}
&\left\langle p^2\right\rangle=\frac{1}{\Omega_{\delta E}(E)}\frac{1}{h}\int_{E-\delta E\le\mathcal{H}\le E}\mathrm{d}p\mathrm{d}x\;p^2= \\
&\frac{1}{\Omega_{\delta E}(E)}\left(\frac{1}{h}\left(\int_{\frac{p^2}{2mE}+\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}}\le1}\mathrm{d}p\mathrm{d}x\;p^2-\int_{\frac{p^2}{2m(E-\delta E)}+\frac{x^2}{\frac{2(E-\delta E)}{m\omega^2}}<1}\mathrm{d}p\mathrm{d}x\;p^2\right)\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Ugyanúgy először érdemes általánosan megvizsgálni a

$$\int_{\frac{p^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\le1}\mathrm{d}p\mathrm{d}x\;p^2=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}p\;p^2\int_{-b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}}\mathrm{d}x=\int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\;p^2 2b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}} \tag{11}$$

kifejezést, ahol ismét bevezetve a $\frac{p}{a}=\cos(t)$ új változót, az előző alfeladat alapján a $\frac{\pi a^3 b}{4}$ eredményt kapjuk. Behelyettesítve ismét a és b értékét, az alábbi kifejezés adódik az impulzus második momentumára:

$$\left\langle p^2\right\rangle=\frac{\hbar\omega}{\delta E}\frac{\pi}{4}\frac{4m\left(E^2-(E-\delta E)^2\right)}{\omega}=mE+\mathrm{o}(\delta E) \tag{12}$$

Most számoljuk ki ismét a másik módszerrel, $\varrho(x,p)=\frac{\omega}{2\pi}\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]$

$$\begin{aligned}
&\left\langle p^2\right\rangle=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,p^2\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]= \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,p^2\,\frac{\delta(x-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}})+\delta(x+\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}})}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}}m\omega^2} \\
&=\mathcal{N}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}}\mathrm{d}p\,\frac{2p^2}{m\omega^2\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}}}=\frac{\omega}{2\pi}\frac{2}{m\omega^2}\frac{2E}{m\omega^2}m^3\omega^3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}=mE
\end{aligned} \tag{13}$$

(c) A hely $\langle x^2\rangle$ és az impulzus $\langle p^2\rangle$ második momentumaira teljesül, hogy $\left\langle \frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\rangle = E$, vagy más szavakkal $\left\langle\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\rangle = \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle = \frac{E}{2}$, ami megfelel a jól ismert viriáltételnek.

(d) A hely szórásnégyzete:

$$\left\langle \delta x^2\right\rangle \equiv \left\langle (x-\langle x\rangle)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 . \tag{14}$$

Azaz csak a hely várható értékét szükséges kiszámolnunk. Ezt először az állapotszám segítségével számoljuk ki. Könnyen belátható, hogy ez nulla, ugyanis vegyük ismét az általános alakot:

$$\langle x\rangle \sim \int_{\frac{p^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\leq 1} \mathrm{d}p\mathrm{d}x\; x = \int_{-b}^{b} x \int_{-a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} \mathrm{d}p = \int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\; x2a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}} = 0\,, \tag{15}$$

ahol $b=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $\sqrt{\frac{2(E-\delta E}{m\omega^2}}$, illetve $a=\sqrt{2mE}$, $\sqrt{2m(E-\delta E)}$. Ekkor azonban az argumentum egy páratlan függvény, amit a szimmetrikus $[-b,b]$ tartományra integrálunk, tehát azt kapjuk, hogy

$$\left\langle \delta x^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle \approx \frac{E}{m\omega^2}. \tag{16}$$

Hasonlóan erre az eredményre jutunk, ha a másik módon írjuk fel a sűrűségfüggvényt, $\rho(x,p) = \mathcal{N}\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]$:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\, x\,\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-E\right]\\ &= \mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\, x\,\frac{\delta(p-\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})+\delta(p-\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2})}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}/m}\\ &= \mathcal{N}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \mathrm{d}x\,\frac{mx}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}} = 0\,,\end{aligned} \tag{17}$$

mivel ismét az utolsó lépésben egy páratlan függvényt integráltunk. Rögtön látható lett volna már az első sorból is, hiszen „elvileg" ott is egy páros függény argumentumú „függvény" szerepel az $\sim x$ mellett.

(d) Az impulzus marginális eloszlásához ki kell integrálnunk a sűrűséget a hely szerint. Ezt most először az állapotösszeg segítségével tesszük meg:

$$\begin{aligned}\varrho(p) &= \frac{1}{\Omega_{\delta E}(E)}\left(\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}\frac{\mathrm{d}x}{h^{1/2}} - \int_{-\sqrt{\frac{2(E-\delta E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2(E-\delta E)}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}\frac{\mathrm{d}x}{h^{1/2}}\right)\\ &= \frac{2}{h^{1/2}\Omega_{\delta E}(E)}\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}} - \sqrt{\frac{2(E-\delta E)}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}\right)\\ &\approx \frac{2\hbar\omega}{\delta E}\frac{\delta E}{mh^{1/2}\omega^2\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{h}\pi m\omega\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}\mathbb{I}\left[\sqrt{2m(E-\delta E)},\sqrt{2mE}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

Most ezt is meghatározzuk a $\rho(x,p)=\frac{\omega}{2\pi}\delta\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2-E\right]$ sűrűségfüggvény segítségével:

$$\begin{aligned}\rho(p) &= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\mathrm{d}x\,\frac{\delta(x-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}})+\delta(x+\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}})}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2m^2}}m\omega^2}\\ &= \frac{1}{\pi m\omega}\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}-\frac{p^2}{m^2\omega^2}}}\mathbb{I}\left[\sqrt{2m(E-\delta E)},\sqrt{2mE}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

(e) A hely $\langle x^4\rangle$ negyedik momentuma.
Az általános formulával érdemes ismét kezdeni, ami a szokásos $\cos(t)=\frac{x}{a}$ helyettesítés után a

következő alakra vezet:

$$\begin{aligned}&\int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\, x^4 2a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}} \to \int_0^{\pi}\mathrm{d}t\, 2b^5 a\cos^4(t)\sin^2(t) = \frac{b^5 a}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\,\cos^2(t)\left(1-\cos(4t)\right)\\ &\frac{b^5 a}{8}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\left(1+\cos(2t)\right)\left(1-\cos(4t)\right)) = \frac{\pi b^5 a}{8},\end{aligned} \tag{20}$$

ahol az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\cos(nt)\cos(mt) = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}$, ha $n,m>0$ ($n,m=0$ esetben az eredmény $\int_0^{\pi}\mathrm{d}t = \pi$).
Ennek segítségével ismét felírhatjuk a negyedik momentumra vonatkozó kifejezést a és b paraméterek behelyettesítésével, ami az

$$\left\langle x^4\right\rangle = \frac{1}{2m^2\delta E\omega^4}\left(E^3-(E-\delta E)^3\right) = \frac{1}{2m^2\delta E\omega^4}\left(3E^2\delta E - 3E\delta E^2 + \delta E^3\right) \approx \frac{3E^2}{2m^2\omega^4} \tag{21}$$

eredményre vezet, ahol az utolsó lépésben ismét csak a vezetőrendet hagytuk meg az $E \gg \delta E$ határesetnek megfelelőem.

2. **Körlapon végzett ergodikus mozgás sűrűség függvénye**

(a) A mozgás polár koordinátás leírásához először meg kell határoznunk a Lagrange függvényt. Ehhez kifejezzük a sebességet polár koordinátákban, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\,. \tag{22}$$

Innen a két kanonikus impulzus $p_r = \partial L/\partial\dot{r} = m\dot{r}$ és $p_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$, illetve a Hamilton függvény, $\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$. Innen a sűrűség

$$\varrho(p_r,p_\varphi,r,\varphi) = \mathcal{N}\delta\left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - E\right]\,. \tag{23}$$

Tehát a maradék feladat a normálási faktor meghatározása:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}}\mathrm{d}p_r\int_{-\sqrt{2mr^2E}}^{\sqrt{2mr^2E}}\mathrm{d}p_\varphi\,\delta\left[\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}-E\right] = 1\\ &= 2\pi m\mathcal{N}\int_0^R\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}}\mathrm{d}p_r\int_{-\sqrt{2mr^2E}}^{\sqrt{2mr^2E}}\mathrm{d}p_\varphi\frac{\delta(p_r+\sqrt{2mE-p_\varphi^2/r^2})+\delta(p_r-\sqrt{2mE-p_\varphi^2/r^2})}{\sqrt{2mE-p_\varphi^2/r^2}}\\ &= \frac{4\pi m\mathcal{N}}{\sqrt{2mE}}\int_0^R\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{2mr^2E}}^{\sqrt{2mr^2E}}\mathrm{d}p_\varphi\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p_\varphi^2}{2mEr^2}}} = 4\pi^2 m\mathcal{N}\int_0^R\mathrm{d}r\,r = 2\pi^2 m\mathcal{N}R^2 \to \mathcal{N} = \frac{1}{2\pi^2 mR^2}\end{aligned} \tag{24}$$

Tehát a teljes sűrűségfüggvény:

$$\varrho(p_r,p_\varphi,r,\varphi) = \frac{1}{2\pi^2 mR^2}\delta\left[\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}-E\right]\,. \tag{25}$$

(b) Most a koordináták szerinti sűrűséghez ki kell integrálnunk a két impulzust, azaz megismételjük a fenti levezetés első két integrálját:

$$\varrho(r,\varphi) = \mathcal{N}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}}\mathrm{d}p_r\int_{-\sqrt{2mr^2E}}^{\sqrt{2mr^2E}}\mathrm{d}p_\varphi\,\delta\left[\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}-E\right] = 2\pi m\mathcal{N}r = \frac{r}{\pi R^2} \tag{26}$$

természetesen a teljes sűrűség üggvényben még figyelembe kell vennünk, hogy a szög szerint egyenletes a $[0,2\pi]$ intervallumon, illetve hogy $r\in[0,R]$.

3. **Pattogó labda impulzusának idő-és sokaságátlaga**

(a) Mozgásegyenlet és impulzus

$$z(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2,\ p(t) = m(v_0 - gt) \text{ a legmagasabb pont eléréséig} \tag{27}$$

Innen az időátlag a folyamat szimetrikussága miatt egyszerűen kiszámítható egyszerűen a legmagasabb $z(T) = \frac{v_0^2}{2g}$ pont eléréséig eltelt $T = v_0/g$ idő alatt

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, p(t) = \frac{g}{v_0}\int_0^{v_0/g} \mathrm{d}t\, m(v_0 - gt) = m\frac{g}{v_0}\frac{v_0^2}{2g} = mv_0/2. \tag{28}$$

(b) Most a sokaságátlag kiszámítása a $\rho = \mathcal{N}\delta\left[\frac{p^2}{2m} + mgz - E\right]$ alak segítségével. Először ismét a normálási faktort adjuk meg:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\int_0^{\frac{v_0^2}{2g}} \mathrm{d}z \int_0^{mv_0} \mathrm{d}p\, \delta\left[\frac{p^2}{2m} + mgz - E\right] = 1 \\ = \frac{\mathcal{N}}{mg}\int_0^{mv_0} \mathrm{d}p = \frac{\mathcal{N}}{mg} mv_0 \rightarrow \mathcal{N} = \frac{g}{v_0} \end{aligned} \tag{29}$$

Ennek felhasználásával a sokaságátlag:

$$\langle p \rangle = \mathcal{N}\int_0^{\frac{v_0^2}{2g}} \mathrm{d}z \int_0^{mv_0} \mathrm{d}p\, p\, \delta\left[\frac{p^2}{2m} + mgz - E\right] = \frac{\mathcal{N}}{mg}\int_0^{mv_0} \mathrm{d}p\, p = \frac{\mathcal{N}m^2v_0^2}{2mg} = mv_0/2\,. \tag{30}$$

4. **N darab részecske szétosztása két dobozba, p első dobozba kerülési valószínűséggel**

(a) $P(n)$: annak a valószínűsége, hogy pontosan n részecske kerül az első dobozba:
$\Rightarrow$ Binomiális eloszlás:

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \tag{31}$$

ahol p^n annak a valószínűsége, hogy adott n részecske az első dobozba kerül, míg $(1-p)^{N-n}$ annak, hogy a maradék $N - n$ részecske nem kerül bele az első dobozba, illetve $\binom{N}{n}$ ad számot arról, hányféleképpen választhatjuk ki az első dobozba kerülő n részecskét, ha a részecskék sorrendje nem számít, azaz a részecskék *megkülönböztethetetlenek*.

(b) Első dobozba kerülő részecskék számának átlaga:
Definíció alapján:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} nP(n) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^{N-n} np^n, \tag{32}$$

aminek kiszámításához a következő trükköt alkamazzuk (ismétlés *Valószínűségszámítás 1*-ből): $np^n = p\frac{\partial}{\partial_p}p^n$, amit visszaírva a várható érték kifejezésébe és kiemelve a $p\frac{\partial}{\partial p}$ tagot az összegzés elé, illetve annak érdekében, hogy a deriválás továbbra is csak a p^n tagon hasson, bevezetve a $q = 1 - p$ új változót, a következőt kapjuk:

$$\langle n \rangle = p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = pN(p+q)^{N-1}\Bigg|_{q=1-p}. \tag{33}$$

Mivel a deriválást a megfelelő módon végeztük el, úgy, hogy csak a p^n tagon hatott, ebben a kifejezésben már visszaírhatjuk a $q \equiv 1 - p$ megfeleltetést, ami az

$$\langle n \rangle = pN \tag{34}$$

eredményt adja.
Megjegyzés: ezt az eredményt azon az úton is megkaphattuk volna, ha először a $p \equiv x$ új változó bevezetésével élünk, de csak a p^n tagban, majd a kérdéses tagot $x\frac{\partial}{\partial x}x^n\Big|_{x=p} = np^n$ módon fejezzük ki. Ezt követően ismét kiszámítjuk a binomiális összeget, ahol p^n helyett most már x^n szerepel, aztán az eredményre, $(x + 1 - p)^N$-re, hatatjuk az $x\frac{\partial}{\partial x}$ operátort, majd visszahelyettesítjük a $p = x$

megfeleltetést.
Az első dobozba kerülő részecskék szórása:
Definíció alapján: $\left\langle \delta n^2 \right\rangle = \left\langle n^2 \right\rangle - \left\langle n \right\rangle^2$. Az első tag kiszámításához ismét az előző trükköt alkalmazzuk, ismét bevezetve a $q = 1 - p$ új változót:

$$\left\langle n^2 \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^{N-n} n^2 p^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^{N-n} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) p^n \bigg|_{q=1-p}. \tag{35}$$

Ismét kiemelve az összegzés elé a deriválást, illetve felhasználva, hogy $\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) = p\left(\frac{\partial}{\partial_p} p\right)\frac{\partial}{\partial_p} + p^2 \frac{\partial}{\partial_p}\frac{\partial}{\partial_p} = p\frac{\partial}{\partial p} + p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}$, a következő kapjuk:

$$\left(p \frac{\partial}{\partial p} + p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) (p+q)^N \bigg|_{q=1-p} = pN + p^2 N (N-1) \to \left\langle \delta n^2 \right\rangle = p(1-p) N. \tag{36}$$

Relatív hiba:

$$\frac{\sqrt{\langle \delta n^2 \rangle}}{\langle n \rangle} = \sqrt{\frac{1-p}{pN}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{37}$$

(c) Binomiális eloszlás normális eloszlással való közelítése (De Moivre–Laplace tétel).
Nagy $N \gg 1$ és $n \gg 1$ esetén másodrendig sorba fejtjük az $f(n) = \ln(P(n))$ kifejezést, amihez először felírjuk $f(n)$ Stirling-formulával való közelítését:

$$\begin{aligned} f(n) &\approx N\ln(N) - N - n\ln(n) + n - (N-n)\ln(N-n) + (N-n) + n\ln(p) + (N-n)\ln(q) = \dots \\ \dots &= N\ln(N) - n\ln(n) - (N-n)\ln(N-n) + n\ln(p) + (N-n)\ln(q) + \mathrm{o}(\ln(n)). \end{aligned} \tag{38}$$

Célunk a másodrendű sorfejtés $\langle n \rangle \equiv Np$ átlagos részecskeszám körül. Ehhez először kiszámoljuk $f(n)$ első és második deriváltját

$$\frac{\partial f(n)}{\partial n} \equiv f'(n) = -\ln(n) + \ln(N-n) + \ln\left(\frac{p}{q}\right), \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2} \equiv f''(n) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{N-n}. \tag{40}$$

Most vegyük magának a függvénynek és az első két deriváltjának az értékét az $n = \langle n \rangle$ pontban:

$$f(\langle n \rangle) = N\ln(N) - Np\ln(Np) - Nq\ln(Nq) + Np\ln(p) + Nq\ln(q) \tag{41}$$

$$= N\ln(N) - Np\ln(N) - Nq\ln(N) = 0, \tag{42}$$

$$f'(\langle n \rangle) = -\ln(Np) + \ln(Nq) + \ln\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \tag{43}$$

$$f''(\langle n \rangle) = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{Nq} = -\frac{1}{Npq} = -\frac{1}{\langle \delta n^2 \rangle}. \tag{44}$$

Tehát $f(n)$ $\langle n \rangle$ körüli másodrendű Taylor-sorfejtésében csak a másodrendű tag nem zérus:

$$f(n) = f(\langle n \rangle) + f'(\langle n \rangle)(n - \langle n \rangle) + \frac{1}{2} f''(\langle n \rangle)(n - \langle n \rangle)^2 + \mathrm{o}\left((n - \langle n \rangle)^3\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{Npq}(n - \langle n \rangle)^2 + \mathrm{o}\left((n - \langle n \rangle)^3\right). \tag{45}$$

Látható tehát, hogy $P(n)$ egy Gauss-eloszlással közelíthető, ha a logaritmusát $n\ln(n)$ rendig a Stirling-formulával közelítve, másodrendig sorba fejtjük. Ha a Stirling-közelítésben tovább mentünk volna, akkor látható módon a visszaexponencializálás során legfeljebb hatványtagokat kaphattunk volna, exponenciálisat nem (a következő tag a Stirling-formulában $\frac{1}{2}\ln(n)$, mely egyszerűen $\sqrt{n}$ hatványtagot adott volna). Tehát sikerült az összes exponenciális „erejű" tagot kiszeparálnunk. Továbbá mivel valószínűségekről van szó, a fent maradó tagok nem adhatnak mást mint a normálási faktor, ami $f(n)$ közelítő kifejezésének nevezőjéből olvasható le: $\frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}$. Tehát összességében a normális approximáció a következőt adja:

$$P(n) \approx \frac{\exp\left(-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2Npq}\right)}{\sqrt{2\pi Npq}}. \tag{46}$$

(d) Becsüljük meg, hogy egy $2 \times (10\text{nm})^3$ nagyságú dobozban, $N_1 = 50$ ideális gázatom tipikusan mennyi idő alatt gyűlik össze a doboz egyik felében, ha a gázatomok átlagos sebességének a légköri hangsebességet $v \approx 300\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vesszük.
Mivel a doboz két fele között semmilyen megkülönböztetéssel nem élhetünk, $p = \frac{1}{2}$ a gázatomok megtalálási valószínűsége a doboz egyik felében. Annak az átlagos ideje, hogy egy részecske a doboz egyik feléből átmegy a másikba jól becsülhető a $\Delta t_1 = \frac{10\text{nm}}{300\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 3,3 \times 10^{-11}\text{s}$ értékkel. Így annak a tipikus ideje, hogy az összes gázatom a doboz egyik felében található, mivel a gázatomok egymástól függetlennek tekinthetőek, egyszerűen:

$$\Delta \bar{t}_1 \approx \frac{\Delta t_1}{P_1\,(\text{egyik felében})}, \tag{47}$$

ahol $P_1\,(\text{egyik felében}) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \approx 9 \times 10^{-16}$, annak a valószínűsége, hogy az összes, egymástól független gázatom a doboz egyik felében található. Végeredményben a $\Delta \bar{t}_1 \approx 10\text{h}$ adódik.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a doboz mérete $2 \times 1\,(\text{mm})^3$ és ezzel arányosan nő a gázatomok száma is, $N_2 = 5 \times 10^{16}$. Elvégezve az előző eset számításait, a valószínűségre az igen kicsi $P_2\,(\text{egyik felében}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N_2} \approx 9 \times 10^{-10^7}$ értéket kapjuk, ami pedig tipikusan

$$\Delta \bar{t}_2 \approx \frac{\Delta t_2}{P_2\,(\text{egyik felében})} \sim 10^{10^7}\text{s} \tag{48}$$

átlagos időt jelent.
Megjegyzés: Ez egy borzasztóan hosszú idő, összehasonlításként az univerzum életkora: $T_{\text{univ}} \approx 4.4 \times 10^{17}\text{s}$, nagyságrendileg ezt az eredményt kapnánk $N_2 = 100$ gázatom esetén az utóbbi doboz méret esetén.