1. statisztikus fizika gyakorlat

1. **Termodinamika ismétlés:**

   Termodinamika főtételei:

   0. létezik a termikus egyensúly mint ekvivalenciareláció (ha A és B és A és C is egyensúlyban vannak, akkor B és C is), jellemző mennyiségekkel $(p, V, T, N, \dots)$

   I. $\mathrm{d}E = \delta Q + \delta W$, energiát hő és munkavégzés formájában lehet közölni egy rendszerrel. Reverzibilis folyamatban $\delta Q^{\text{rev}} = T\mathrm{d}S$, $\delta W^{\text{rev}} = \sum_i X_i \mathrm{d}\xi_i$, legtöbbször $\delta W^{\text{rev}} = -p\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$.

   II. Nincs $\eta = 1$ hatásfokú hőerőgép (Planck); nincs olyan spontán folyamat, amely pusztán abból állna, hogy a hő hidegebb helyről melegebb helyre megy (Clausius)

   III. Homogén anyagokra $\lim_{T\to 0} S = 0$, következésképpen ez a fajhőkre is igaz lesz.

   Entrópia:

   - termikus kölcsönhatást jellemző extenzív mennyiség, $\delta Q^{\text{rev}} = T\mathrm{d}S$
   - $\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}E + \frac{p}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N$, izolált rendszerben ez ≥ 0 (II. főtétel)
   - $S(E, V, N)$ természetes változók
   - kifejezés $\mathrm{d}S$-re, abszolút S-hez kell a III. főtétel

   Legendre-transzformáció: tekintsük az $f(x_1, x_2)$ kétváltozós (konvex) függvényt, amelynek parciális deriváltjai legyenek

   $$y_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \tag{1}$$

   $$y_2(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \tag{2}$$

   Definiáljuk az alábbi függvényt:

   $$g(y_1, x_2) = y_1 \cdot x_1 - f(x_1, x_2)\,. \tag{3}$$

   Az így bevezetett függvényben lényegében lecseréltük az x_1 változót a neki megfelelő parciális deriváltra, y_1-re, ugyanis a két függvény teljes differenciáljait megvizsgálva

   $$\mathrm{d}f(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = y_1 \mathrm{d}x_1 + y_2 \mathrm{d}x_2, \tag{4}$$

   $$\mathrm{d}g(y_1, x_2) = \mathrm{d}\left(y_1 \cdot x_1\right) - \mathrm{d}f(x_1, x_2) = x_1 \mathrm{d}y_1 + y_1 \mathrm{d}x_1 - \mathrm{d}f(x_1, x_2) = x_1 \mathrm{d}y_1 - y_2 \mathrm{d}x_2. \tag{5}$$

   A teljes differenciálokban megjelenő infinitezimális mennyiségek jelzik az egyes függvények természetes változóit. Többé-kevésbé a $g(y_1, x_2)$ függvényt nevezzük az $f(x_1, x_2)$ (első változója szerinti) Legendre-transzformáltjának, a termodinamikában ennek a függvénynek a mínusz egyszeresét szoktuk megkonstruálni a termodinamikai potenciálok definíciójához.

   Példa Legendre-transzformációra a termodinamikában szokásos konvenció szerint:

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[f(x, y, z)] &= g(p, y, z) && (6) \\ &= \min_x [f(x, y, z) - px] && (7) \\ &= f(x^*, y, z) - px^* && (8) \end{aligned}$$

   ahol x^* a megoldása a

   $$\left.\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = p \tag{9}$$

egyenletnek. Termodinamika:

$$F(T,V,N) = E(S^*,V,N) - TS^*, \tag{10}$$

ahol

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[E(S,V,N) - TS\right]\bigg|_{S=S^*} = 0, \tag{11}$$

azaz

$$\frac{\partial E(S,V,N)}{\partial S}\bigg|_{S=S^*} = T. \tag{12}$$

Ebből:

$$F(T,V,N) = \mathcal{L}_S[E(S,V,N)] = E(S,V,N) - TS. \tag{13}$$

Belső energia:

- $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$, $E(S,V,N)$ természetes változói a belső energiának
- $\mathrm{d}E = \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}}_{T}\mathrm{d}S + \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}}_{-p}\mathrm{d}V + \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}}_{\mu}\mathrm{d}N$
- $E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S,V,N)$ elsőrendű homogén függvény, λ szerint deriválva $\lambda = 1$-ben:
- $E(S,V,N) = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} S + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} V + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} N = TS - pV + \mu N$ Euler-összefüggés
- $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\left(TS - pV + \mu N\right) = S\mathrm{d}T + T\mathrm{d}S - V\mathrm{d}p - p\mathrm{d}V + N\mathrm{d}\mu + \mu\mathrm{d}N = \mathrm{d}E + (S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p + N\mathrm{d}\mu)$
  $\Rightarrow$ Gibbs–Duhem-reláció: $S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p + N\mathrm{d}\mu = 0$.

Termodinamikai potenciálok: belső energia Legendre-transzformáltjai (plusz az entrópia)

- $S(E,V,N)$: maximuma határozza meg az izolált rendszer egyensúlyát
- $E(S,V,N) \to F(T,V,N) = E(S,V,N) - TS = -pV + \mu N$ szabadenergia (Helmholtz free energy), minimuma releváns ha nincs hőszigetelés (termikus kapcsolat van környezet és alrendszer között)
  $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$
- $H(S,p,N) = E(S,V,N) - (-p)V = TS + \mu N$ entalpia (enthalpy), minimuma releváns ha változhat az alrendszer térfogata
  $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}N$
- $G(T,p,N) = E(S,V,N) - TS + pV = \mu N$ szabadentalpia (Gibbs free energy), minimuma releváns
  $\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}N$
- Maxwell-relációk: potenciálok vegyes második deriváltjaiból, Young-tétel alapján, pl.
  $\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

2. **Valószínűségszámítás ismétlés:**

- véletlen események, lehetséges kimenetelek halmaza az Ω eseménytér
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (Ω hatványhalmazának egy részhalmaza) egy σ-algebra ($\Omega \in \mathcal{F}$; $\mathcal{F}$ zárt a komplementumképzésre; $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható unióképzésre)
- valószínűség: $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény valószínűségi mérték: nemnegatív; diszjunkt eseményekre megszámlálhatóan additív (σ-additív); $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- kézzelfogható jelentés: lényegében relatív gyakoriság
- feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, következőleg $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$
- teljes valószínűség tétele: ha $\{B_i\}_{i=1}^n$ teljes eseményrendszer ($B_i \bigcap B_j = \emptyset$ ha $i \neq j$ és $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$), akkor $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$
- A és B események akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$; ilyenkor $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

- valószínűségi változó: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Lényegében: elemi eseményekhez valós számot rendelő függvény; egy véletlen szám (ha úgy tetszik). Diszkrét/folytonos az értékkészlete számosságától függően.
- diszkrét valószínűségi változó eloszlása: $p : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$.
- folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye: $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
- abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$
- várható érték: $\mathbb{E}X = \sum\limits_i x_i p(x_i)$ diszkrét, $\mathbb{E}X = \displaystyle\int x f(x)\,\mathrm{d}x$ folytonos.
- szórás: $\mathbb{D}X = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]}$

3. **Gamma-függvény:** lényegében a faktoriális általánosítása. Definíció:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

amiből

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^z\right)\mathrm{d}t \tag{16}$$

$$= \frac{1}{z}\underbrace{\left[\mathrm{e}^{-t}\, t^z\right]_0^\infty}_{0} + \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^z\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$= \frac{1}{z}\Gamma(z+1)\,, \tag{18}$$

vagyis

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{19}$$

(v.ö. $(n+1)! = (n+1)\cdot(n!)$).

Nevezetes helyeken az értéke:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 \tag{20}$$

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1 \tag{21}$$

$$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2 \tag{22}$$

$$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 2\cdot 3 = 6 \tag{23}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{24}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi} \tag{25}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{26}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \tag{27}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \tag{28}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{29}$$

4. **n-dimenziós gömb V_n térfogata és A_n felszíne:**

$$V_n(r) = C_n r^n = \int_0^r dV_n(r') = \int_0^r A_n(r')\,\mathrm{d}r' \tag{30}$$

$$A_n(r) = \frac{\mathrm{d}V_n(r)}{\mathrm{d}r} = nC_n r^{n-1}. \tag{31}$$

Vegyük észre, hogy az

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2}\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{32}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}} \tag{33}$$

integrál gömbi polárkoordinátákban felírt alakja

$$I_n = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,A(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,nC_n r^{n-1}\mathrm{d}r, \tag{34}$$

amiből $y = r^2$ helyettesítéssel

$$I_n = \frac{nC_n}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\,y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}y \tag{35}$$

$$= \frac{nC_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{36}$$

Összevetve (32) és (36) egyenlet jobb oldalát:

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{37}$$

Az első pár dimenzióra:

$$C_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad V_1(r) = 2r \tag{38}$$

$$C_2 = \frac{\pi}{\Gamma(2)} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad V_2(r) = r^2\pi \tag{39}$$

$$C_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{4}{3}\pi \qquad \Rightarrow \qquad V_3(r) = \frac{4}{3}r^3\pi \tag{40}$$

$$C_4 = \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V_4(r) = \frac{\pi^2}{2}r^4 \tag{41}$$

$$C_5 = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{8}{15}\pi^2 \qquad \Rightarrow \qquad V_5(r) = \frac{8}{15}\pi^2 r^5 \tag{42}$$

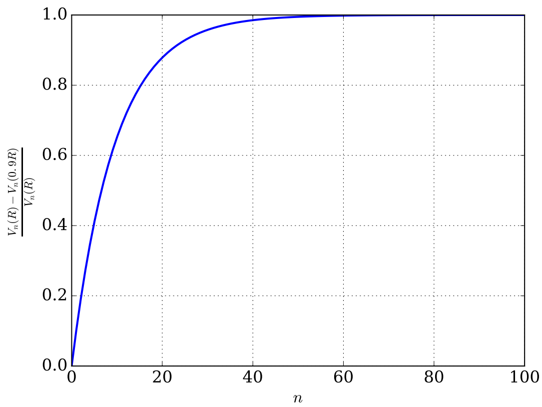
Egy R sugarú gömb külső, $\mathrm{d}R$ vastag gömbhéjának térfogata a teljes térfogat arányában

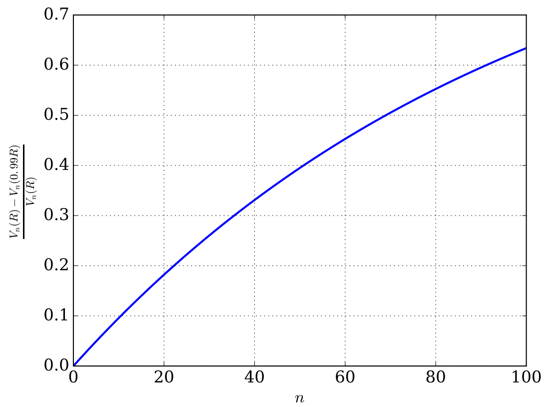
$$\frac{A_n(R)\,\mathrm{d}R}{V_n(R)} = \frac{nC_n R^{n-1}\mathrm{d}R}{C_n R^n} = n\frac{\mathrm{d}R}{R} \tag{43}$$

Látjuk, hogy minél magasabb dimenziós a tér, annál nagyobb hányadát teszi ki a gömbnek a felszíni gömbhéja. Ez olyannyira igaz, hogy nagyon nagy dimenziószámok esetén egyre kisebb $\mathrm{d}R$ esetén lesz csak érvényes a közelítés, miszerint a gömbhéj térfogata $A_n(R)\,\mathrm{d}R$ (ugyanis mi történik, ha $n > \dfrac{R}{\mathrm{d}R}$, azaz $n\dfrac{\mathrm{d}R}{R} > 1$?). Láthatóan a fő üzenet világos, még a látszólag téves $n\frac{\mathrm{d}R}{R} \to \infty$ határeset ellenére is. Azaz az, hogy a infinitezimális gömbhéj sokkal nagyobb lesz mint maga a gömbhéj azt mutatja, hogy kicsi gömbhéjak hozzáadása esetén hatalmasat változik a térfogat, vagyis a teljes térfogat igazából “kiszorul a gömb felszínáre”. Azonban, hogy egzaktabbul vizsgáljuk, hogy milyen kovnergencia tulajdonságokkal rendelkezik a gömbhéj és a térfogat aránya, a következőt írjuk fel:

$$\frac{V_n(R) - V_n(R - \mathrm{d}R)}{V_n(R)} = \frac{C_n R^n - C_n\,(R - \mathrm{d}R)^n}{C_n R^n} = 1 - \left(1 - \frac{\mathrm{d}R}{R}\right)^n , \tag{44}$$

ahol a második tag látványosan 0-hoz tart n szerint fix $\mathrm{d}R/R$ arány esetén. Dimenziófüggés $\mathrm{d}R = 0.1R$ illetve $\mathrm{d}R = 0.01R$ esetén:





Megjegyezzük, hogy ez afenti határáték szorosan fgg attól, hogy a deriválást $R + \mathrm{d}R$ vagy $R - \mathrm{d}R$ módon végezzük el. Ha az elbbit tettük volna, akkor ebbe na megközelítésben is a korábbi “furcsa” végtelen határértéket kaptuk volna:

$$\frac{V_n(R + \mathrm{d}R) - V_n(R)}{V_n(R)} = \frac{C_n\,(R + \mathrm{d}R)^n - C_n R^n}{C_n R^n} = \left(1 + \frac{\mathrm{d}R}{R}\right)^n - 1 \to \infty\,. \tag{45}$$

5. **Stirling-formula:** Állítás: nagyon nagy N-re ($N \gg 1$)

$$\ln(N!) \sim N \ln N - N \tag{46}$$

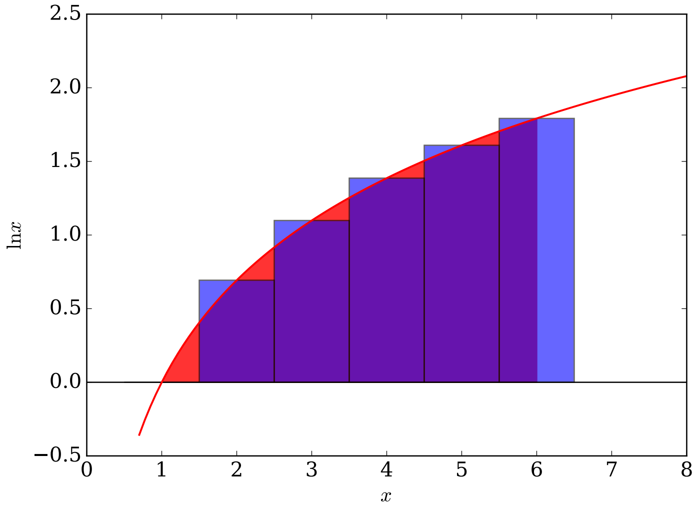
$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \text{“} \sim \text{”} \left(\frac{N}{e}\right)^N , \tag{47}$$

aminek a pontos értelmezésével azért óvatosan kell bánni, lásd mindjárt.

Az első alakhoz:

$$\ln(N!) = \sum_{n=1}^{N} \ln n \approx \underbrace{\int_1^N \ln x \mathrm{d}x}_{[x \ln x - x]_1^N} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} + \frac{1}{2}\ln N, \tag{48}$$

ugyanis a baloldali szumma lényegében a jobboldali integrál közelítő összege:



A közelítés hibája ugyanúgy legfeljebb logaritmikus nagyságrendű, mint (47) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja, vagyis

$$\ln(N!) = N\ln N - N + O(\ln N) = N\ln\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right) + O(\ln N)\,, \tag{49}$$

ahol az integrál konstans 1 járulékát is elhanyagoltuk (vagy ha úgy jobban tetszik, beleolvasztottuk a hibatagba). Itt a hibatag logaritmikus nagyságrendje alatt matematikailag precízen azt kell érteni, hogy a hiba nagy N-ekre felülről becsülhető $c \cdot \ln N$-nel, alkalmas c konstans esetén. Egy alternatív megfogalmazás szerint

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\ln(N!)}{N\ln N - N} = 1, \tag{50}$$

ezt kell érteni a fenti $\ln(N!) \sim N\ln N - N$ közelítés alatt.

A Stirling-formula második alakjával óvatosabban kell bánni:

$$N! = \mathrm{e}^{\ln(N!)} = c_N\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N, \tag{51}$$

ahol $c_N = O(N)$. Azt állítjuk, hogy vezető rendben $c_N = \sqrt{2\pi N}$, tehát a precíz közelítés:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N} = 1, \text{ vagy} \tag{52}$$

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N. \tag{53}$$

Vegyük észre, hogy bár a legerősebb függést a második tényező tartalmazza, mégis a gyakran használt

$$N! \sim \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \tag{54}$$

közelítés elfedi azt a tényt, hogy ezzel tévedünk egy kb. $2.5\sqrt{N}$ faktort (ahol $N \gg 1$).

6. **Riemann-zeta:** kvantumgázok leírásánál elő fognak kerülni az alábbi alakban felírt integrálok:

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x, \tag{55}$$

melyek végesek amennyiben $s > 1$. Átalakítva:

$$I(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^{s-1}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x \tag{56}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \tag{58}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\int_0^\infty y^{s-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \tag{59}$$

$$= \Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}. \tag{60}$$

Az itt megjelenő végtelen sor definiálja a Riemann-féle zeta-függvényt:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}. \tag{61}$$

Nevezetesebb értékei:

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty \tag{62}$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2.612 \tag{63}$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \tag{64}$$

$$\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1.341 \tag{65}$$

$$\left(\zeta(0) = \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty \text{ helyett } -\frac{1}{2}\right) \tag{66}$$

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Mutassuk meg, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. (Tipp: számoljuk ki ennek a mennyiségnek a négyzetét síkbeli polárkoordináták segítségével!)

2. Határozzuk meg az $f(x_1, x_2) = x_1^2\left(x_2^4 - 1\right)$ függvény $g(y_1, x_2) = y_1 x_2 - f(x_1, x_2)$ Legendre-transzformáltját, ahol $y_1 = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

3. Az egyatomos ideális gáz állapotegyenlete $pV = Nk_\mathrm{B}T$, belső energiája $E = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T$. Határozzuk meg az $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ hőtágulási tényezőt, a $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ izoterm kompresszibilitást és az izobár illetve az izochor hőkapacitás $c_p - c_V$ különbségét! $\left(c_p = \left(\dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_p, \quad c_V = \left(\dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \left(\dfrac{\partial E}{\partial T}\right)_V\right)$

*4. A van der Waals-gáz állapotegyenlete $\left(p + \dfrac{N^2}{V^2}a^2\right)(V - Nb) = Nk_\mathrm{B}T$. Határozzuk meg a hőtágulási tényezőt, az izoterm kompresszibilitást és az izobár illetve az izochor hőkapacitás különbségét! $\left(\text{Tipp: } c_p - c_V = \dfrac{TV\alpha^2}{\kappa_T}\right)$