

Név:

Neptun kód:

1. Feladat**25 pont**

Tekintsünk egy véges mélységű gömbszimmetrikus potenciálgödröt:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (V_0 > 0)!$$

Milyen feltétel mellett lesz a rendszernek kötött gömbszimmetrikus sajátállapota ($-V_0 < E < 0$, $\ell = 0$)?

Segítség: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} u(r) + V(r) u(r) = E u(r)$

2. Feladat**25 pont**

Egy elektron Yukawa-potenciálban mozog:

$$V(r) = -ke^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

Tekintsük a hidrogénatomot perturbálatlan rendszernek: $V_0(r) = -ke^2/r$!

a) Fejtsük sorba a Yukawa-potenciált λ -ban másodrendig! Írjuk fel a perturbáció operátorát és határozzuk meg a hidrogénatom kötött állapotainak energiakorrekcióját a perturbációs számítást első rendjében! Hogyan módosul az állapotok elfajultsága? (20)

Segítség: Használjuk a gyakorlaton levezetett összefüggést: $\langle n\ell m | r | n\ell m \rangle = \frac{a_0}{2}(3n^2 - \ell(\ell+1))$.

b) Bizonyítsuk, hogy a perturbációs számítás másodrendjében tisztán λ^4 -nel arányos energiakorrekciót kapunk! (5)

Segítség: A másodrendű energiakorrekció: $\Delta E_n^{(2)} = \sum_{n'(\neq n)} \frac{|\langle n | \Delta V | n' \rangle|^2}{E_{n'} - E_n}$. (Az állítás a folytonos spektrum figyelembevételével is fennáll, de azzal most ne foglalkozzunk!)

3. Feladat**25 pont**Legyen egy $\ell = 1$ impulzusmomentumú töltött részecske perturbálatlan Hamilton-operátora

$$H_0 = \omega_0 L_z + \frac{K}{\hbar^2} L_z^2 \quad (\omega_0, K > 0).$$

a) Írjuk fel a Hamilton-operátor mátrixát az $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$ bázisban! Mik a perturbálatlan rendszer sajátenergiái! (5)

Helyezzük a rendszert y irányú, B indukciójú mágneses térbe, amit a $W = \omega L_y$ perturbáló operátorral írunk le, ahol $\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar}$.

b) Írjuk fel a perturbáció mátrixát! (Használjuk az $L_{\pm}$ léptető operátorokat!) (10)

c) Határozzuk meg az energiaszintek elsőrendű perturbációs korrekcióját, ha $\hbar\omega_0 \neq K$, illetve $\hbar\omega_0 = K$! (10)

4. Feladat

25 pont

Egy hidrogénatomot kisülés alatt lévő kondenzátor lemezei közé juttatunk. A külső z irányú elektromos tér az

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \Theta(t)$$

függvénnyel írható le, ahol $\Theta(t)$ a lépésfüggvény.

a) Milyen valószínűséggel gerjesztődik az elektron az alapállapotból az első gerjesztett állapotba hosszú idő eltelte után ($t \gg \tau$)? (20)

b) Vizsgáljuk meg a $\tau \rightarrow \infty$ határesetet! Ugyanezt az eredményt kapnánk a Fermi-arany szabály alkalmazásával is? (5)

Segítség: $c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | W(t') | 0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_1)t'} dt'$, $E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \frac{1}{n^2}$, $a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2}$

$$P_{10}(r) = \frac{2e^{-r/a_0}}{a_0^{3/2}}, \quad P_{20}(r) = \frac{2e^{-r/2a_0}}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right), \quad P_{21}(r) = \frac{2e^{-r/2a_0}}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{2a_0},$$

$$z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0(\vartheta, \varphi), \quad \int_0^\infty dx x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$