

Név:

Neptun kód:

1. Feladat**25 pont**

Tekintsünk egy vonzó Dirac-delta gömbhéj potenciált, $V(r) = -K\delta(r - R)$ ($K > 0$)!

a) Adott K esetén, R milyen tartományában lesz a rendszernek kötött gömbszimmetrikus sajátállapota ($E < 0$, $\ell = 0$)? (Alkalmazzon grafikus megoldást!) (20)

b) Mi a kötött gömbszimmetrikus állapot energiájának minimuma és mikor éri el ezt a rendszer? (5)

Segítség:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} u_\ell(r) + V(r) u_\ell(r) = E u_\ell(r)$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\frac{du_\ell(r)}{dr} \Big|_{R+\varrho} - \frac{du_\ell(r)}{dr} \Big|_{R-\varrho} \right) = -\frac{2mK}{\hbar^2} u_\ell(R)$$

2. Feladat**25 pont**

Egy részecske $V(x) = \gamma|x|$ potenciálban mozog ($\gamma > 0$). Ritz-variációs módszerrel becsljük meg az alapállapot energiáját! Próbafüggvénynek válasszuk a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

normált Gauss-függvényt, ahol x_0 a variációs paraméter!

Segítség: $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \sqrt{\pi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3. Feladat**25 pont**

A rögzített középpontú síkbeli rotátor Hamilton-operátora

$$H_0 = \frac{L_z^2}{2\Theta} = -\frac{\hbar^2}{2\Theta} \frac{d^2}{d\varphi^2},$$

ahol Θ a tehetetlenségi nyomaték.

a) Határozza meg a H_0 operátor $\psi(\varphi)$ sajátállapotait, a sajátenergiákat és azok degenerációját! (5)

Tegyük fel, hogy a rotátor $\vec{p} = p(\cos\varphi, \sin\varphi)$ elektromos dipóllal rendelkezik és helyezzük x irányú elektromos térbe:

$$W = -\vec{p}\vec{\mathcal{E}} = -p\mathcal{E} \cos\varphi.$$

b) Számítsa ki a W operátor mátrixelemeit a H_0 sajátbázisán! Változnak-e a rotátor sajátenergiái az időfüggetlen perturbációszámítás első rendjében? (10)

c) Határozzuk meg az energiaszintek eltolódását másodrendben! Felhasadnak-e a degenerációk? Mely energiaszint csökken, illetve melyik nő? (10)

Segítség: $E_m^{(2)} = \sum_{n(\neq m)} \frac{|\langle \varphi_n^0 | W | \varphi_m^0 \rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0}$

4. Feladat

25 pont

Egy alapállapotban lévő harmonikus oszcillátor ω körfrekvenciáját a $[0, \tau]$ időintervallumban a felére csökkentjük.

a) Tekintsük az eredeti körfrekvenciájú oszcillátort a perturbálatlan rendszernek, $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$! Írja fel az időfüggő perturbáció operátorát! ($W(x, t) = ?$) (5)

b) H_0 milyen sajátállapotaiba indukálódik átmenet a perturbációszámítás első rendjében? (5)

c) Mi annak a valószínűsége, hogy a rendszer az alapállapotban marad, amikor visszatérünk az eredeti körfrekvenciára ($t > \tau$)? (15)

Segítség: $c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \varphi_n | W(t) | \varphi_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t} dt$