

Név:

Neptun kód:

1. Feladat**25 pont**

Egy részecske végtelen magas falú potenciálgödörben mozog:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \text{ és } x > a \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}.$$

Legyen $t = 0$ időpillanatban a normált hullámfüggvény

$$\psi(x, 0) = A x (a - x) \quad x \in [0, a].$$

a) Határozza meg az A normálási konstans ($A > 0$)! (5 pont)

b) Határozza meg a $\psi(x, t)$ hullámfüggvényt $t > 0$ esetén! (15 pont)

Segítség: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

c) Milyen valószínűséggel mérhetünk $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$, illetve $E = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{ma^2}$ energiát? (5 pont)

2. Feladat**25 pont**

Legyen a rendszer potenciális energiája,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| \geq a \\ -K \delta(x) & |x| < a \end{cases},$$

ahol $K > 0$!

a) Mi annak a feltétele, hogy a Schrödinger-egyenletnek létezzen negatív energiájú megoldása? (15 pont)

b) Rögzített K esetén adja meg az energia alsó korlátját? Mikor lesz a rendszer alapállapot energiája ez az érték? (5 pont)

c) Mikor lesz a rendszer energiája zérus? Határozza meg a normált hullámfüggvényt ebben az esetben! (5 pont)

Segítség: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)) = -\frac{2mK}{\hbar^2} \psi(0)$

3. Feladat**25 pont**

Határozzuk meg az áthatolási és visszaverődési együtthatót a következő potenciális energiára:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ V_0 + K\delta(x) & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

ahol $V_0 > 0$. Először oldjuk meg a feladatot $E > V_0$ esetben, majd diszkutáljuk az $0 < E < V_0$ esetet!

4. Feladat

25 pont

Legyen $|0\rangle$ egy ω frekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátor alapállapota, valamint a és a^+ a léptető operátorok. Bizonyítsa, hogy az $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+}|0\rangle$ koherens állapot, azaz $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$)!

Segítség: Használhatja a Hausdorff-kifejtést, $e^L A e^{-L} = A + [L, A] + \frac{1}{2!} [L, [L, A]] + \dots$