

Név:

Neptun kód:

1. Feladat**25 pont**

Kezdetben egy $\alpha\omega$ frekvenciájú harmonikus oszcillátor alapállapotban van, ahol α egy pozitív konstans. Valamely időpontban az oszcillátor frekvenciája hirtelen ω -ra változik és ezután mérést végzünk az oszcillátor energiájára. Milyen valószínűséggel mérhetünk (i) $\frac{\hbar\omega}{2}$, illetve (ii) $\frac{3\hbar\omega}{2}$ energiát?

Segítség: $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$, $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{x_0\sqrt{\pi}}} \frac{x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Megoldás:

(i) $t = 0$ időpillanatban a rendszer az $\alpha\omega$ frekvenciájú oszcillátor alapállapotában van:

$$\psi'_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x'_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0'^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2x_0^2}}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$x'_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha m\omega}} = \frac{x_0}{\sqrt{\alpha}}.$$

Ez az állapot kifejezhető az ω frekvenciájú oszcillátor sajátállapotai szerint,

$$\psi'_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x),$$

ahol

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n(x)^* \psi'_0(x).$$

$t > 0$ esetén a hullámfüggvény:

$$\psi'_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}.$$

Az energiamérések lehetséges eredményei $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, melyek mérései valószínűsége

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n(x)^* \psi'_0(x, t) \right|^2 = \left| c_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \right|^2 = |c_n|^2$$

A $\frac{\hbar\omega}{2}$ energia mérésének valószínűsége tehát $|c_0|^2$, ahol

$$c_0 = \langle \psi_0 | \psi'_0 \rangle = \frac{\alpha^{1/4}}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1+\alpha}{2x_0^2}x^2} dx = \frac{\alpha^{1/4}}{x_0\sqrt{\pi}} x_0 \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}} = \alpha^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}$$

↓

$$P_0 = \frac{2\sqrt{a}}{1+\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \leq 1$$

(ii) Mivel $\psi'_0(x)$ páros függvény, $\psi_1(x)$ páratlan függvény,

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1(x) \psi'_0(x) = 0,$$

ezért a $\frac{3\hbar\omega}{2}$ energia mérésének valószínűsége zérus.

2. Feladat

25 pont

Tekintsük az alábbi potenciált,

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases},$$

a $V_0 \rightarrow 0$ határesetben (sekély potenciálgödör). Számítsuk ki, mekkora erő hat a potenciálgödör falára:

$$p = -\frac{dE(a)}{da}.$$

Segítség: $V_0 \rightarrow 0$ határesetben csak egy kötött állapot van. Milyen szimmetriájú az állapotfüggvény? Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképlete $x_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$. Használjon V_0 szerinti sorfejtést első rendben!

Megoldás:

$$-V_0 < E < 0 \rightarrow \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad \beta = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

A véges mélységű potenciálgödör alapállapotú hullámfüggvénye páros:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} & x \leq -a \\ B \cos \beta x & |x| > a \\ Ae^{-\kappa x} & a \leq x \end{cases}$$
$$\psi'(x) = \begin{cases} A\kappa e^{\kappa x} & x \leq -a \\ -B\beta \sin \beta x & |x| > a \\ -A\kappa e^{-\kappa x} & a \leq x \end{cases}$$

A hullámfüggvény folytonosságából

$$Ae^{-\kappa a} = B \cos \beta a$$

A hullámfüggvény deriváltjának folytonosságából

$$A\kappa e^{-\kappa a} = B\beta \sin \beta a$$

A második egyenletet az elsővel elosztva kapjuk a

$$\kappa = \beta \tan \beta a$$

feltételt. Mivel $V_0 \rightarrow 0$ esetén $|E| \rightarrow 0$ és $E + V_0 = V_0 - |E| \rightarrow 0$, ezért $\beta \rightarrow 0$, ezért használhatjuk a $\tan \beta a \sim \beta a$ elsőrendű Taylor-sorfejtést:

$$\kappa = \beta^2 a.$$

Ezután kétféleképpen haladtunk tovább:

(1) Felhasználva, hogy $\beta^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} - \kappa^2$, a

$$\kappa = -\kappa^2 a + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2},$$

illetve átrendezve a

$$a\kappa^2 + \kappa - \frac{2mV_0a}{\hbar^2} = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek pozitív megoldása,

$$\kappa = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{1 + \frac{8mV_0a^2}{\hbar^2}} \simeq \frac{2mV_0a}{\hbar^2}$$

ahol a $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$ sorfejtést alkalmaztuk. Innen az energia,

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} \simeq -\frac{2mV_0^2a^2}{\hbar^2}$$

és a nyomás

$$p = \frac{4mV_0^2a}{\hbar^2}.$$

(2) A másik út egy kicsit kacifántosabb:

$$\kappa = \beta^2 a \rightarrow \kappa^2 = \beta^4 a^2 = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \kappa^2 \right)^2 a^2,$$

amit átírhatunk a

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}E = (V_0 + E)^2$$

alakra. Célszerű bevezetni az $E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ konstanst, így a

$$-E_0 E = (V_0 + E)^2,$$

majd átrendezve

$$E^2 + (2V_0 + E_0)E + V_0^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2V_0 + E_0}{2} \pm \frac{\sqrt{(2V_0 + E_0)^2 - 4V_0^2}}{2} \\ &= -V_0 - \frac{E_0}{2} \pm \frac{E_0}{2}\sqrt{1 + \frac{4V_0}{E_0}}. \end{aligned}$$

Ebben a megoldásban szükség lesz a gyökös mennyiség másodrendű sorfejtésére,

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \rightarrow \sqrt{1 + \frac{4V_0}{E_0}} \sim 1 + \frac{2V_0}{E_0} - \frac{2V_0^2}{E_0^2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} E &\simeq -V_0 - \frac{E_0}{2} \pm \frac{E_0}{2} \left(1 + \frac{2V_0}{E_0} - \frac{2V_0^2}{E_0^2} \right) \\ &= -V_0 - \frac{E_0}{2} \pm \left(\frac{E_0}{2} + V_0 - \frac{V_0^2}{E_0} \right). \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy a +-os megoldást kell választanunk, mert azt várjuk, hogy a $V_0 \rightarrow 0$ határesetben az energia is zérus lesz:

$$E \simeq -\frac{V_0^2}{E_0} = -\frac{2mV_0^2 a^2}{\hbar^2},$$

ami valóban az (1) eljárással kapott eredmény. Látjuk, hogy $\sqrt{1 + \frac{4V_0}{E_0}}$ elsőrendű sorfejtésével az $E = 0$ eredményt kaptuk volna.

3. Feladat

25 pont

Az e^{ikx} síkhullámmal leírt részecske szóródik a

$$V(x) = \begin{cases} K \delta(x) & x \leq a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

potenciálban? Vegyük fel a hullámfüggvényt

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x \leq 0 \\ B \sin k(x-a) & 0 < x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases},$$

alakban.

a) Számítsuk ki a B együttható abszolút értékének négyzetét, ami azzal a valószínűséggel arányos, hogy a részecske a $(0, a)$ tartományban tartózkodik! (15 pont)

b) Mekkora a $|B|^2$ a $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ hullámhossz következő értékei esetén: a) $\frac{n\lambda}{2} = a$ ($n \in \mathbb{N}$), b) $\lambda \rightarrow 0$ és c) $\lambda \rightarrow \infty$? (5 pont)

c) Számítsa ki az A együtthatót és bizonyítsa, hogy a reflexiós együttható 1! (5 pont)

Megoldás:

a) A hullámfüggvény:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x \leq 0 \\ B \sin k(x-a) & 0 < x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases},$$

ahol $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ és kihasználtuk, hogy a hullámfüggvény $x = a$ -ban zérus értéket vesz fel.

Folytonosság $x = 0$ -ban:

$$1 + A = -B \sin ka$$

Határfeltétel a deriváltra:

$$Bk \cos ka - ik(1 - A) = \frac{2mK}{\hbar^2} (1 + A) = -\frac{2mK}{\hbar^2} B \sin ka$$

$\Downarrow$

$$ik(1 - A) = \frac{2mK}{\hbar^2} B \sin ka + Bk \cos ka$$

$\Downarrow$

$$1 - A = -i \frac{2mK}{k\hbar^2} B \sin ka - iB \cos ka$$

Ezt az egyenletet az első egyenlettel összeadva kapjuk:

$$2 = -B \left(\sin ka + i \left(\frac{2mK}{k\hbar^2} \sin ka + \cos ka \right) \right)$$

$\Downarrow$

$$B = -\frac{2k}{k \sin ka + i \left(\frac{2mK}{\hbar^2} \sin ka + k \cos ka \right)}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} |B|^2 &= \frac{4k^2}{k^2 \sin^2 ka + \left(\frac{2mK}{\hbar^2} \sin ka + k \cos ka\right)^2} \\ &= \frac{4k^2}{k^2 + 2\left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^2 (1 - \cos 2ka) + k \frac{2mK}{\hbar^2} \sin 2ka} \end{aligned}$$

b)

$$1) \quad ka = n\pi \rightarrow n \frac{\lambda}{2} = a \Rightarrow |B|^2 = 4$$

$$2) \quad k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lambda \rightarrow 0 \rightarrow |B|^2 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{x^2}{4}} = 4$$

$$3) \quad k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} |B|^2 &\rightarrow \frac{4k^2}{k^2 + 2\left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^2 2k^2 a^2 + 2k^2 \frac{2mK}{\hbar^2} a} \\ &= \frac{4}{1 + 4\left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^2 a^2 + \frac{4mK}{\hbar^2} a} \\ &= \frac{4}{\left(1 + \frac{2mK}{\hbar^2} a\right)^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A &= -B \sin ka - 1 \\ &= \frac{2k \sin ka}{k \sin ka + i \left(\frac{2mK}{\hbar^2} \sin ka + k \cos ka\right)} - 1 \\ &= \frac{k \sin ka - i \left(\frac{2mK}{\hbar^2} \sin ka + k \cos ka\right)}{k \sin ka + i \left(\frac{2mK}{\hbar^2} \sin ka + k \cos ka\right)} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$R = |A|^2 = 1$$

4. Feladat

25 pont

a) Számítsuk ki az xp operátor várhatóértékét a lineáris harmonikus oszcillátor tetszőleges sajátállapotában: (10 pont)

$$\langle n|xp|n\rangle = ?$$

b) Általánosítható-e a kapott eredmény bármely egydimenziós rendszer (normált) stacionárius állapotára? (Segítség: Használja ki az x és p operátorok felcserélési relációját!) (10 pont)

c) Mi a várhatóérték a harmonikus oszcillátor koherens állapotaiban: (5 pont)

$$\langle \alpha|xp|\alpha\rangle = ?$$

ahol $a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$). Milyen α esetén lesz a várhatóérték tisztán képzetes?

Segítség: $a_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x}{x_0} \mp i \frac{p}{p_0} \right)$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $p_0 = \sqrt{m\omega\hbar}$

Megoldás:

a)

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_0 (a_+ + a_-)$$

$$p = i \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 (a_+ - a_-)$$

$$xp = \frac{i\hbar}{2} (a_+^2 + a_- a_+ - a_+ a_- - a_-^2) = \frac{i\hbar}{2} (a_+^2 + 1 - a_-^2)$$

$$\langle n|xp|n\rangle = \frac{i\hbar}{2}$$

b) A stacionárius állapotok hullámfüggvénye választható valósnak, ezért

$$\langle \psi|xp|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x \frac{d\psi(x)}{dx} \in i\mathbb{R},$$

azaz

$$\langle \psi|xp|\psi\rangle = i \operatorname{Im} \langle \psi|xp|\psi\rangle.$$

Az x és p operátorok felcserélési relációját felhasználva:

$$\langle \psi|[x, p]|\psi\rangle = i\hbar$$

$$\langle \psi|xp|\psi\rangle - \langle \psi|px|\psi\rangle = \langle \psi|xp|\psi\rangle - \langle xp\psi|\psi\rangle = \langle \psi|xp|\psi\rangle - \langle \psi|xp|\psi\rangle^* = 2i \operatorname{Im} \langle \psi|xp|\psi\rangle = 2\langle \psi|xp|\psi\rangle$$

$\Downarrow$

$$\langle \psi|xp|\psi\rangle = \frac{i\hbar}{2}$$

c)

$$\langle \alpha|xp|\alpha\rangle = \frac{i\hbar}{2} \langle \alpha|a_+^2 + 1 - a_-^2|\alpha\rangle = \frac{i\hbar}{2} (\alpha^{*2} + 1 - \alpha^2) = \hbar \operatorname{Im} \alpha^2 + \frac{i\hbar}{2}$$

$$\alpha = |\alpha| e^{i\frac{n\pi}{2}} \rightarrow \alpha^2 = |\alpha|^2 e^{in\pi} = (-1)^n |\alpha|^2 \in \mathbb{R} \rightarrow \langle \alpha|xp|\alpha\rangle = \frac{i\hbar}{2}$$