Kvantummechanika 1 gyakorlat 2. pótZH **2025. május 28.**

Név: **Neptun kód:**

---

1. FELADAT 25 pont
Az $L_\pm$ léptetőoperátorok használatával határozzuk meg a ΔL_x és ΔL_y szórásokat az L^2, L_z operátorok $|\ell, m\rangle$ sajátállapotaiban! Mikor lesz a két szórás szorzata zérussal egyenlő?

Megoldás

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \to L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right) \quad L_y = \frac{1}{2i}\left(L_+ - L_-\right)$$

$$\Downarrow$$

$$L_x\left|\ell, m\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\left|\ell, m+1\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\left|\ell, m-1\right\rangle$$
$$L_y\left|\ell, m\right\rangle = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\left|\ell, m+1\right\rangle - \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\left|\ell, m-1\right\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \ell, m\right| L_x \left|\ell, m\right\rangle = \left\langle \ell, m\right| L_y \left|\ell, m\right\rangle = 0$$

$$L_x^2 = \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+\right)$$
$$L_y^2 = -\frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+\right)$$

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2 = \frac{1}{2}\left(L_+L_- + L_-L_+\right)$$

$$L_x^2 = \frac{1}{2}\left(L^2 - L_z^2\right) + \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2\right)$$
$$L_y^2 = \frac{1}{2}\left(L^2 - L_z^2\right) - \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \ell, m\right| L_x^2 \left|\ell, m\right\rangle = \left\langle \ell, m\right| L_y^2 \left|\ell, m\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(\ell\left(\ell+1\right) - m^2\right)$$

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{\ell\left(\ell+1\right) - m^2}$$

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2}\left(\ell\left(\ell+1\right) - m^2\right)$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \rightarrow \Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle L_z \rangle| = \frac{\hbar^2}{2}|m|$$

$$\ell\,(\ell+1) - m^2 \geq |m| \longleftrightarrow \ell\,(\ell+1) \geq |m|(|m|+1)$$

$$m = \pm\ell \rightarrow \Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2 \ell}{2}$$

$$\ell = m = 0 \rightarrow \Delta L_x \Delta L_y = 0$$

2. FELADAT 25 pont

Gömbszimmetrikus $V(r)$ potenciál esetén a hullámfüggvény $\varphi_l(r)$ radiális komponensét meghatározó radiális Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi_l(r))}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\varphi_l(r)+V(r)\varphi_l(r)=E\varphi_l(r)\,.$$

Vezessük le az $l=0$ állapotok energiáját meghatározó implicit egyenletet a következő potenciál esetében ($\gamma>0$):

$$V(r)=\begin{cases}\gamma\delta(r-R/2) & \text{ha} \quad r<R\\ \infty & \text{ha} \quad r\geq R\end{cases}\,.$$

Megoldás

Vezessük be az $u_l(r)=r\varphi_l(r)$ függvényt. Ekkor a radiális Schrödinger-egyenlet $l=0$-ra zérus potenciálban,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}=Eu_l(r)\,.$$

Mivel a $V(r)$ potenciál minimuma zérus, az E energia nem lehet negatív. Érdemes bevezetni a $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$hullámszámot, mellyel

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}=-k^2u_l(r)\,.$$

Ennek megoldás $0<r\leq R/2$ esetén

$$u_l(r)=A\sin kr\,,$$

mert így a $\varphi_l(r)$ hullámfüggvény $r\to 0$ határértéke véges (Ak). Az $R/2<r<R$ intervallumban az $u_l(r)$ függvény $\sin kr$ és $\cos kr$ lineárkombinációja, és az $u_l(R)=0$ feltétel miatt írható az

$$u_l(r)=B\sin k(R-r)$$

alakban. Mivel az $u_l(r)$ függvény folytonos $r=R/2$-nél,

$$A\sin(kR/2)=B\sin(kR/2)\to A=B\,.$$

A teljes $u_l(r)$ függvény differenciálegyenlete,

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}-\alpha\delta(r-R/2)u_l(r)=-k^2u_l(r)\,,$$

amiből az

$$u_l'(R/2+0)-u_l'(R/2-0)=\alpha u_l(R/2)$$

Dirac-delta határfeltétel következik, ahol $\alpha=\frac{2m\gamma}{\hbar^2}$ és $u_l'(r)=\frac{du_l(r)}{dr}$. Behelyettesítés után

$$-2Ak\cos(kR/2)=A\alpha\sin(kR/2)\Rightarrow \underline{2k=-\alpha\tan(kR/2)}$$

Grafikus szemléltetésből látszik, hogy végtelen metszéspont van, melyekre teljesül az alábbi feltétel:

$$k_nR/2\in\left[(n+\frac{1}{2})\pi,(n+1)\pi\right]\qquad n=0,1,2,\ldots$$

3. FELADAT 25 pont

A kétdimenziós izotróp harmonikus oszcillátor Hamilton operátora:

$$H_0 = \hbar\omega \left(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1 \right) ,$$

ahol ω az oszcillátor sajátfrekvenciája, valamint a_x és a_y a léptető operátorok:

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p_x}{p_0} \right), \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y}{x_0} + i\frac{p_y}{p_0} \right) \qquad \left(x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \;\; p_0 = \sqrt{\hbar m\omega} \right)$$

a) Mutassuk meg, hogy $L_z = \frac{\hbar}{i}(a_x^+ a_y - a_y^+ a_x)$!

b) Az első gerjesztett állapot kétszeresen degenerált. Kapcsoljunk be z-irányú, B nagyságú homogén mágneses teret. Ekkor a Hamilton operátor a következőképpen módosul:

$$H = H_0 + \frac{qB}{2m} L_z \; .$$

ahol q az oszcillátor töltése. A mágneses teret tartalmazó tagot perturbációként tekintve határozzuk meg, miként hasad fel az oszcillátor első gerjesztett állapota a perturbációszámítás első rendjében!

Megoldás:

a)

$$\begin{aligned} L_z = xp_y - yp_x &= \frac{\hbar}{2i}[(a_x + a_x^+)(a_y - a_y^+) - (a_y + a_y^+)(a_x - a_x^+)] \\ &= i\hbar(a_x a_y^+ - a_y a_x^+) \, . \end{aligned}$$

b)

A vizsgált altér bázisa $\{|10\rangle, |0,1\rangle\}$ és az L_z operátor hatása ezen a bázisvektorokon:

$$\begin{aligned} L_z|1,0\rangle &= i\hbar|0,1\rangle \\ L_z|0,1\rangle &= -i\hbar|1,0\rangle \end{aligned}$$

így perturbáció mátrixa,

$$W = \frac{\hbar qB}{2m} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Az elsőrendű energiakorrekciók a W sajátértékei

$$\delta E^{(1)} = \pm \frac{\hbar qB}{2m}$$

Az energiaszint tehát szimmetrikusan felhasad.

4. FELADAT 25 pont

Kezdetben egy q töltésű, egydimenziós harmonikus oszcillátor alapállapotban van, majd τ ideig bekapcsolunk egy $\mathcal{E}$ nagyságú homogén elektromos teret. Az elektromos tér kikapcsolása után hogyan fog változni az oszcillátor $D(t) = q\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$ dipólusmomentuma az időfüggő perturbációszámítás első rendjében?

Segítség:

$$|\psi^{(1)}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|\varphi_0\rangle + \sum_{n\neq 0} c_n^{(1)}(t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\,|\varphi_n\rangle$$

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t'} W_{0n}\left(t'\right)$$

Megoldás: