

9. gyakorlat

2023. május 2.

1. Az $L_{\pm}$ léptetőoperátorok használatával határozzuk meg a ΔL_x és ΔL_y szórásokat az L^2 , L_z operátorok $|\ell, m\rangle$ sajátállapotában! Bizonyítsuk, hogy $\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar^2 |m|}{2}$! Mikor áll fenn az egyenlőség? Mikor lesz a két szórás szorzata zérussal egyenlő?

2. A felcserélési relációk segítségével bizonyítsuk, hogy

$$p^2 = \frac{1}{r^2} \left[(\vec{r}\vec{p})^2 + \frac{\hbar}{i} \vec{r}\vec{p} \right] + \frac{L^2}{r^2} = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2},$$

ahol

$$p_r = \frac{1}{r} \vec{r}\vec{p} + \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} = \frac{\hbar}{i} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \partial_r r$$

a radiális impulzus!

Következmény:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r})$$

3. Tekintsünk egy végtelen magas falú gömbalakú potenciáldobozt:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } r \leq R \\ \infty & \text{ha } r > R \end{cases}.$$

A radiális Schrödinger-egyenlet az $r \leq R$ tartományban:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r P_\ell(r)) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} P_\ell(r) = E P_\ell(r),$$

ahol a hullámfüggvény $\psi(\vec{r}) = P_\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$.

a) Írjuk fel a fenti egyenlet megoldásait a $P_\ell(R) = 0$ határfeltétel figyelembe vételével!

b) Adjunk explicit kifejezést a sajátfüggvényekre és sajátenergiákra az $\ell = 0$ esetben! (*Megoldás mellékelve!*)

4. A háromdimenziós izotróp harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora,

$$H = \hbar\omega \left(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + a_z^+ a_z + \frac{3}{2} \right),$$

ahol

$$a_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{r_i}{x_0} + i \frac{p_i}{p_0} \right) \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{m\omega\hbar}.$$

Bizonyítsuk, hogy

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} (\vec{a}^+ \times \vec{a}).$$

Kapcsolódó házi feladatok: Ennek felhasználásával lássuk be, hogy

$$[L_i, H] = 0.$$

Igazoljuk, hogy az alapállapot perdülete zérus,

$$L_i |000\rangle = 0,$$

és az első gerjesztett állapotok az $\ell = 1$ perdületű alteret alkotják:

$$L^2 a_l^+ |000\rangle = 2\hbar^2 a_l^+ |000\rangle \rightarrow \ell = 1.$$

Konstruáljuk meg az L_z operátor mátrixát az első gerjesztett nívó háromdimenziós alterén! Határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat!

További házi feladatok:

- Lássuk be az alábbi felcserélési relációkat:

$$[L_i, p_r] = 0$$

$$[p_r, f(r)] = \frac{\hbar}{i} \frac{df(r)}{dr}.$$

- Bizonyítsuk, hogy p_r hermitikus operátor az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ téren:

$$\int d^3r \psi(\vec{r})^* p_r \varphi(\vec{r}) = \int d^3r \varphi(\vec{r})^* p_r \psi(\vec{r}).$$

- Számítsuk ki az $\langle r \rangle$ várhatóértéket a végtelen magas falú gömbalakú potenciáldoboz sajátállapotaiban $\ell = 0$ esetben (l. 3b példa)! Mekkora a nyomás a potenciáldoboz falán ezekben az állapotokban?
- Tekintsünk egy vonzó Dirac-delta gömbhéj potenciált, $V(r) = -K\delta(r - R)$ ($K > 0$)! Milyen feltétel mellett lesz a rendszernek kötött gömbszimmetrikus sajátállapota ($E < 0$, $\ell = 0$)?

A 3b) példa megoldása

$\ell = 0$ estén a radiális Schrödinger-egyenlet potenciálgödör belsejében ($r \leq R$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2 (r P_0(r))}{dr^2} = E P_0(r) .$$

$u_0(r) = r P_0(r)$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ és $x = kr$ jelölések bevezetésével a

$$u_0(x) - \frac{d^2 u_0(x)}{dx^2} = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$u_0(x) = A \sin x \rightarrow P_0(r) = A \frac{\sin kr}{r} .$$

Megjegyzés: Az ugyancsak normálható $P_0(r) = A \frac{\cos kr}{r}$ függvény is megoldása a radiális Schrödinger-egyenletnek. Ekkor az $r \rightarrow 0$ határesetben a hullámfüggvény $\psi(\vec{r}) = \frac{A}{r}$ alakú lenne, ami viszont nem teljesíti Schrödinger-egyenletet, hiszen $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$ miatt egy ilyen hullámfüggvényre $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - E\right)\psi(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\delta(r)$ teljesül.

A $P_\ell(R) = 0 \rightarrow \sin kR = 0$ határfeltételből a hullámszám lehetséges értékei,

$$k_n = \frac{n\pi}{R} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

illetve a lehetséges energiaértékek

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mR^2} n^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A hullámfüggvény normálása:

$$4\pi |A|^2 \int_0^R r^2 dr \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{R}r\right)}{r^2} = \frac{4\pi |A|^2 R}{n\pi} \int_0^{n\pi} dx \sin^2(x) = \frac{4\pi |A|^2 R}{n\pi} \frac{n\pi}{2} = 2\pi R |A|^2 = 1$$

$$\rightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$$

$\Downarrow$

$$\psi_n(\vec{r}) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right)}{\sqrt{2\pi R}r} = \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right)}{r} Y_0^0(\theta, \varphi) .$$