Példák: Multipólsorfejtés, kapacitás

I. GÖMB FELÜLETI TÖLTÉSELOSZLÁSSAL (A TÍPUSÚ)

Adott egy R sugarú gömbhéj, melyen $\sigma(\theta) = k\cos\theta$ felületi töltéssűrűség helyezkedik el.

1. Számolja ki a töltéseloszlás dipólmomentumát!
2. Vezessen le egy egyszerű közelítő potenciálkifejezést, amely az origótól nagy távolságra érvényes!

II. KÉT PONTTÖLTÉS (A TÍPUSÚ)

Két ponttöltés, $3q$ és $-q$ egymástól a távolságra vannak. Számolja ki ennek az töltéselrendezésnek a

- Monopólmomentumát,
- Dipólmomentumát,
- Közelítő potenciálfüggvényét,

ha a pontok a következő konfigurációkban vannak:

1. $3q(0,0,a); -q(0,0,0)$!
2. $3q(0,0,0); -q(0,0,-a)$!
3. $3q(0,a,0); -q(0,0,0)$!

III. HÁROM KONCENTRIKUS GÖMBHÉJ KAPACITÁS MÁTRIXA (A TÍPUSÚ)

Adott három $a < b < c$ sugarú koncentrikus vezető gömbhéj. Számítsa ki a kapacitás-mátrix független elemeit! Hány ilyen van?
Útmutatás:

1. írja fel a térerősséget a gömbök által határolt térrészeken, ha a rajtuk lévő töltés Q_1, Q_2, Q_3;
2. számolja ki a gömbök potenciálját (a végtelent használva referencia pontként);
3. írja fel a potenciál mátrixot, és ebből számítsa ki a kapacitás mátrixot!

(+) Válasszon három különböző értéket a Φ_a, Φ_b, Φ_c potenciáloknak, és mutassa meg, hogy érvényes a Green-féle reciprocitási tétel!

IV. TÖLTÖTT PÁLCA POTENCIÁLJA

Számolja ki egy λ homogén töltéssűrűségű L hosszúságú pálca potenciáljának első három multipólus tagját, ha a pálca a z tengelyen mentén $-L/2$ és $L/2$ között helyezkedik el!

V. HÁROM PONTTÖLTÉS (B TÍPUSÚ)

Három ponttöltés a következő konfigurációbnan helyezkedik el: q $(0,0,a)$; $-q$ $(0,a,0)$; $-q$ $(0,-a,0)$. Számolja ki a potenciált kvadrupól rendig bezárólag!

VI. DIPÓLPOTENCIÁL (B TÍPUSÚ)

1. Mutassa meg, hogy egy "tiszta" dipólus potenciálja
$$V_{\mathrm{di}}(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{1}$$
2. Vezesse le az elektromos teret gömbkoordinátákban!
3. A fenti eredményről mutassa meg, hogy felírható a következő formában is
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\right]. \tag{2}$$

VII. TÖLTÖTT PÁLCA POTENCIÁLJA (B TÍPUSÚ)

Adott egy vékony szigetelő pálca, a $z=-a$-tól $z=a$-ig, amelyen a következő töltéseloszlások vannak (a) $\lambda = k\cos(\pi z/2a)$, (b) $\lambda = k\sin(\pi z/a)$, (c) $\lambda = k\cos(\pi z/a)$, ahol k egy állandó. Mindhárom esetben számolja ki a potenciál multipólus kifejtésének vezető rendű (nem eltűnő) tagját!

TOVÁBBI GYAKORLÁSRA

VIII. ÁTLAG ELEKTROMOS TÉR GÖMBÖN BELÜL

Mutassa meg, hogy egy R sugarú gömbön belül, magán a gömbön belül található töltésekből eredő átlag elektromos tér,

$$\mathbf{E}_{\text{átlag}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{R^3}, \tag{3}$$

ahol $\mathbf{p}$ a teljes dipólmomentum. Ezt az eredményt, például a következő lépéseket követve lehet bebizonyítani:

- Mutassa meg, hogy az átlag elektromos tér a gömbön belül amelyet egy az $\mathbf{r}$-pontban lévő q töltés hoz létre, az ugyanaz amelyet egy $\rho = -q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ töltéseloszlás hoz létre az $\mathbf{r}$ pontban.

- A fenti eredményt ki lehet számolni a Gauss tétel segítségével. Ebben az eredményben szerepel a q töltés dipólmomentuma is, írja át ebbe az alakba.
- A szuperpozícióelv segítségével megkapjuk a kívánt eredményt.

IX. A DIPÓLUS SZINGULARITÁSA

1. Számolja ki egy z irányba mutató, az origóban lévő dipólus átlag elektromos terét egy R sugarú gömbön belül a VI példában talált elektromos tér kifejezés alapján. Vesse össze ezt az eredményt az előző feladat eredményével. A különbség abból adódik, hogy a dipólus potenciálja az origóban divergál. A szögintegrál nulla, viszont a radiálintegrál végtelen, így nem egyértelmű az eredmény. A paradoxon megoldása, hogy a VI példa eredményét csak egy dipólus körüli ϵ sugarú gömbön kívül tekintjük érvényesnek, ez a kontribució egyértelműen nulla, és a teljes eredmény a gömbön belüli jarulékból ered.
2. Milyennek kell lennie a gömbön belüli térnek, hogy kijöjjön az előző példában talált eredmény? (Válasz: $-(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$)

X. KVADRUPÓLNYOMATÉK ÉS OKTUPÓLNYOMATÉK

1. Mutassa megy, hogy a potenciál kvadrupóltagja felírhato a következő formában:

$$V_{\text{kvad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}. \tag{4}$$

Ebben a kifejezésben $\hat{r}_i$ a kartéziánus koordináta rendszer különböző komponenseinek egységvektorait jelölik,

$$Q_{ij} = \int d\mathbf{r}[3r_ir_j - r^2\delta_{ij}]\rho(\mathbf{r}). \tag{5}$$

A potenciál “hierarchikus”:

$$V_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{6}$$

$$V_{\text{di}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sum_{i=1}^{3}\hat{r}_i p_i}{r^2} \tag{7}$$

$$V_{\text{kvad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sum_{i,j=1}^{3}\hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}}{2r^3}. \tag{8}$$

A monopólnyomaték (Q) skalár, a dipólnyomaték vektor, a kvadrupólnyomaték másodrendű tenzor.

2. Számolja ki a következő töltéskonfiguráció kvadrupólmomentumát: q $(a/2, a/2)$; $-q$ $(-a/2, a/2)$; q $(-a/2, -a/2)$; $-q$ $(a/2, -a/2)$.
3. Mutassa meg, hogy a ha $Q = p = 0$, akkor a kvadrupólnyomaték az origótól független.
4. Vezesse le a potenciál oktupólnyomatéktagját!
5. Adott két töltés, q a $(d/2, 0)$ pontban, $-q$ a $(-d/2, 0)$ pontban. Számolja ki ennek a töltéseloszlásnak az oktupólnyomatékát!

XI. DIPÓLUS KÖRÜL OSZCILLÁLÓ TÖLTÉS

Adott egy “tiszta” dipólus, amely a z irányba mutat, és az origóban van. Egy elektromos töltést az xy-síkban valahol egy ponton rögzítünk, majd elengedjük, azaz, csak a dipólus ereje hat rá. Mutassa meg, hogy a töltés egy félköríven oszcillál, mintha egy origóban rögzített inga lenne.