Példák: Multipólsorfejtés és kapacitás

I. GÖMB TÉRFOGATI TÖLTÉSELOSZLÁSSAL

Adott egy R sugarú gömb, amelynek középpontja az origó. A gömb térfogatán

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta \tag{1}$$

töltéseloszlás van, ahol k egy állandó, r és θ a szokásos gömbkoordináták. Vezesse le ennek a töltéseloszlásnak a potenciálját a z-tengelyen az origótól nagy távolságra!

(Segítség: Vegyük észre, hogy a töltéselrendezés hengerszimmetrikus, ami a dipól- és kvadrupólmomentumok számolását leegyszerűsíti.)

II. NÉGY RÉSZECSKE POTENCIÁLJA

Négy részecskét a következőképen helyezünk el: q töltést a $(0,-a)$ pontra, $3q$ töltést a $(0,a)$ pontra, $-2q$ töltést a $(a,0)$ pontra, és $-2q$ töltést a $(-a,0)$ pontra. Vezessen le egy egyszerű közelítő potenciált, ami az origótól nagy távolságra érvényes!

III. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL

Legyen $\rho_1(\mathbf{r})$ egy töltéseloszlás, amely $\Phi_1(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. Továbbá legyen $\rho_2(\mathbf{r})$ egy másik töltéseloszlás, amely $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. A két töltéseloszlás vagy nem egyidőben létezik, vagy térben egymástól nagyon messze vannak, azaz, a $\rho_1(\mathbf{r})$ töltéseloszlásnak nincs hatása a $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciálra sem vice versa.

Bizonyítsa be a Green-féle reciprocitási tételt, azaz

$$\int \rho_1(\mathbf{r})\Phi_2(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \rho_2(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{2}$$

IV. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL ALKALMAZÁSAI

1. Tegyük fel, hogy van két elkülönített vezető, a és b. Ha az a vezetőre Q töltést helyezünk, úgy, hogy a b semleges marad, akkor a b-nek potenciálja lesz, jelöljük V_{ab}-vel. Ha viszont b-re teszünk Q töltést, akkor az a-nak lesz potenciálja, ezt jelöljük V_{ba}-val. A Green reciprocitási tétel alkalmazásával mutassa meg, hogy $V_{ab} = V_{ba}$! (Ez az eredmény a vezetők alakjától független.)

2. Adott két földelt, koncentrikus fémgömb, sugaruk $a < b$. q töltést helyezünk a központtól r távolságra, úgy, hogy $a < r < b$. Mekkora a teljes indukált töltés a két gömbön?

V. POTENCIÁL- ÉS KAPACITÁSEGYÜTTHATÓK

A térben N darab fémtest helyezkedik el. Ezeken rendre Q_i töltés van és ennek megfelelően a potenciáljuk Φ_i $(i = 1, 2, 3, ..., N)$. A Maxwell egyenletek linearitása miatt írható, hogy

$$\Phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j \tag{3}$$
$$Q_i = \sum_j c_{ij}\Phi_j,$$

ahol p_{ij}, c_{ij} a potenciál- és a kapacitásegyütthatók.

1. A rendszer összenergiájának felírásával mutassa meg, hogy a p_{ij} és a c_{ij} mátrixok szimmetrikusak!

2. Legyen $N = 3$. A c_{ij} adatok ismertek. Algebrai "bővítéssel" írja az egyenleteket

   $$Q_i = \sum_{k=0}^{N} C_{ik}(\Phi_i - \Phi_k), i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

   alakba, ahol Φ_0 a Föld (végtelen távoli pont) potenciálja! A C_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ neve "főkapacitás", a C_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ "földkapacitás" vagy "szórt kapacitás". Együttes nevük "részkapacitás". Rajzoljon ún. áramköri modellt!

3. Írja fel a rendszer energiáját a C_{ik} részkapacitások segítségével!

VI. GÖMBÖK KAPACITÁS-MÁTRIXA

Adott két, R_1 és R_2 sugarú fémgömb. A középpontjaik távolsága legyen $a \gg R_1, R_2$. Mivel az a sokkal nagyobb a gömbök sugaránál, ezért jó közelítéssel a Q_1 töltés elektromos potenciálja az R_2 gömbfelületen mindenhol $Q_1/(4\pi\epsilon_0 a)$-nak vehető és ugyanez fordítva is igaz.

1. Írja fel a p_{ij} mátrixot erre az esetre!

2. A p_{ij} mátrix ismeretében határozza meg a c_{ij} kapacitás együtthatók mátrixát!

3. Határozza meg a C_{12} főkapacitást és a C_{10}, C_{20} szórt (föld-) kapacitásokat!

VII. ÁTLAG ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG GÖMBÖN BELÜL

Mutassa meg, hogy egy R sugarú gömbön belül, a gömbön belül található töltésekből eredő átlagos elektromos térerősség:

$$\mathbf{E}_{\text{átlag}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{R^3}, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{p}$ a teljes dipólmomentum. Ezt az eredményt például a következő lépéseket követve lehet bebizonyítani:

1. Mutassa meg, hogy az átlag elektromos tér a gömbön belül, amelyet egy az $\mathbf{r}$-pontban lévő q töltés hoz létre, az ugyanaz, mint amit egy $\rho = -q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ töltéseloszlás hoz létre az $\mathbf{r}$ pontban.
2. A fenti ρ töltéseloszlás terét ki lehet számolni a Gauss tétel segítségével is. Ebben az eredményben szerepel a q töltés dipólmomentuma is; írja át a (5) alakba!
3. A szuperpozícióelv segítségével általános töltéselrendezésre is megkapjuk a kívánt eredményt.

VIII. A DIPÓLUS SZINGULARITÁSA

Tudjuk, hogy egy "tiszta" dipólus elektromos tere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\right]. \tag{6}$$

1. Számolja ki egy z irányba mutató, az origóban lévő dipólus átlag elektromos terét egy R sugarú gömbön belül és vesse össze a (5) egyenlettel!

   A különbség abból adódik, hogy a dipólus elektromos tere az origóban divergál. A szögintegrál nulla, viszont a radiális integrál végtelen, így nem egyértelmű az eredmény. A paradoxon megoldása, hogy a (6) egyenlet alapján kapott eredményt csak egy dipólus körüli ϵ sugarú gömbön kívül tekintjük érvényesnek, ez a kontribució egyértelműen nulla, viszont a teljes eredmény ((5) egyenlet) a gömbön belüli jarulékból ered.

2. Milyennek kell lennie a gömbön belüli térnek, hogy kijöjjön az előző példában talált eredmény? (Válasz: egy $-(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$ plusz járulékot kell tartalmazni.)