

## Példák: Laplace egyenlet, változószeparáció

### I. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT (A TÍPUSÚ)

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik  $y = 0$ -nál, a másik  $y = a$ -nál, helyezkedik el. A bal végüket,  $x = 0$ -nál, lezárja egy végtelen hosszú szalag, amely a két fémlaptól elszigetelt, és amelynek a potenciálja  $V_0$  konstans. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)
2. Egy végtelen hosszú téglalap-alapú fémcső (a téglalap oldalai  $a$  és  $b$ ) egyik végén ( $x = 0$ ) egy kis téglalap alakú szigetelő a potenciált  $V_0(y, z)$  értéken tartja. Az  $a$  hosszúságú oldal a  $z$ -tengelyen, a  $b$ -hosszúságú pedig az  $y$  tengelyen helyezkedik el. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton ha  $V_0(y, z) = V_0$  állandó. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)
3. Egy kocka, melynek élei  $a$  hosszúságúak, öt oldala földelt fémből van. Az öt oldal össze van forrasztva. A hatodik oldal, (a teteje) nincs összeforrasztva a többivel (egy vékony réteg szigetelő választja el a vele érintkező négy oldaltól), és  $V_0$  a potenciálja. Számolja ki a potenciált a kocka belsejében!

### II. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT (B TÍPUSÚ)

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik  $y = 0$ -nál, a másik  $y = a$ -nál, helyezkedik el. További két végtelen hosszú fémlap egymással párhuzamosan, az egyik  $x = -b$ -nél, a másik  $x = b$ -nél, helyezkedik el. Ezen fémlapok potenciálja  $V_0$ . Számolja ki a potenciált a négy fémlap által közrezárt térfogatonban. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)
2. Az előző feladat esetében számolja ki az  $x = -b$  szalagon lévő töltéssűrűséget, ha a potenciál  $V_0$  állandó!

### III. LAPLACE-EGYENLET GÖMBKOORDINÁTÁKBAN (B TÍPUSÚ)

Gömbkoordinátákban a Laplace egyenlet formája

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (1)$$

Azimutális szimmetria esetén nincs  $\phi$ -függés. Ebben az esetben a megoldás felírható

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2)$$

alakban.

- Mutassa meg, hogy az

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (3)$$

a radiális rész általános megoldása.

A  $\theta$ -függő rész általános megoldásai a Legendre polinomok,  $\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta)$ . Az első néhány Legendre polinom:

$$P_0(x) = 1 \quad (4)$$

$$P_1(x) = x \quad (5)$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \quad (6)$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2. \quad (7)$$

A Legendre polinomokra igaz, hogy

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (8)$$

1. Adott egy  $R$  sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál  $\Phi_0(\theta)$ . Határozza meg a potenciált a gömbön belül!
2. Adott egy  $R$  sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál  $\Phi_0(\theta)$ . Határozza meg a potenciált a gömbön kívül!
3. Adott egy semleges  $R$  sugarú fémgömb, amelyet  $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$  (homogén) külső elektromos térbe helyezünk. Határozza meg a potenciált a gömbön kívül! (Segítség: csak a  $P_0(x)$  és a  $P_1(x)$  Legendre polinomokra van szükség.)

## További gyakorlásra

### IV. LAPLACE-EGYENLET MEGOLDÁSA KONFORM LEKÉPEZÉS MÓDSZERREL

#### A. Bevezetés: A konform leképezés fogalma

Adott a komplex sík, ahol  $z = x + iy$ . A

$$z' = u(x, y) + iv(x, y) \quad (9)$$

egy transzformáció. Ha  $z'$  valamilyen  $D$  régióban analitikus, akkor az ilyen transzformációkat konform

leképezésnek nevezzük. Egy komplex leképezés az eredeti  $x, y$  (vagy  $z$ ) komplex síkról az  $u, v$  (vagy  $z'$ ) komplex síkra képez pontokat. A  $D$  régió belül minden egyes  $x_0, y_0$  pontnak van egy  $u_0, v_0$  megfelelője. Minden egyes  $x, y$  síkon felvett görbének is van egy megfelelő görbéje az  $u, v$ -síkon. Ha két  $x, y$ -síkon felvett görbe metszi egymást, akkor a konform leképezett görbék az  $u, v$ -síkon is metszeni fogják egymást.

A transzformáció

$$z' = \frac{1}{z} \quad (10)$$

egy **konform leképezés** a komplex síkon, kivéve a  $z = 0$  ponton. Konkrétan ezt a transzformációt **inverzió**nak nevezik. Ez a leképezés egy  $x, y$ -síkon felvett kört az  $u, v$ -síkon vagy körre, vagy egy egyenes vonalra képez.

- Bizonyítsa be ezt az állítást! Mutassa meg, hogy a  $z$ -síkon definiált

$$|z - a| = r, \quad (11)$$

kifejezés, ahol  $a = a_x + ia_y$ ,  $r$  egy valós szám, megfelelője a  $z'$  síkon a  $|a| \neq r$  esetre

$$|z' - A| = R, \quad (12)$$

ahol

$$A = \frac{a}{|a|^2 - r^2} \quad (13)$$

$$R = \left| \frac{r}{|a|^2 - r^2} \right|. \quad (14)$$

- Bizonyítsa, hogy az  $|a| = r$  esetben a  $|z - a| = r$  megfelelője a  $z'$  síkon a

$$2\operatorname{Re}(az') - 1 = 0. \quad (15)$$

A konform leképezés sokszor segíthet a két-dimenziós Laplace-egyenlet megoldásában. Adott egy geometria, amely első látásra nehéznek tűnik, de gyakran egy konform leképezés a problémát egy sokkal egyszerűbb geometriává alakítja át.

Mielőtt rátérünk a konform leképezés alkalmazására, néhány általános megjegyzés a kétdimenziós Laplace-egyenlettel kapcsolatban.

Adott egy potenciál  $U(x, y)$ , amelyből levezethető az elektromos tér  $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla U(x, y)$ . A Laplace-egyenlet ebben az esetben,

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

A konform leképezés csak analitikus függvényekre alkalmazható, azaz olyan függvényekre, amelyekre érvényesek a Cauchy-Riemann feltételek. Ezért érdemes az  $U(x, y)$  függvényhez hozzárendelni egy másik  $V(x, y)$  függvényt, amelyek kielégítik a Cauchy-Riemann feltételeket, azaz

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (17)$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}. \quad (18)$$

A teljes komplex potenciál formája

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (19)$$

- Számolja ki az elektromos teret a  $V(x, y)$  függvényében.

### B. Alkalmazás: Két szomszédos (nem koncentrikus) henger

Adott két  $r$ -sugarú henger. A két henger középpontja a  $(c, 0)$  és a  $(-\frac{r^2}{c}, 0)$  pontokban vannak és  $c > r$ . A  $(c, 0)$  középpontú henger felületén a potenciál  $U_1$  (konstans), a  $(-\frac{r^2}{c}, 0)$  középpontúén pedig  $U_2$  (konstans).

- Mutassa meg, hogy a

$$z' = \frac{1}{z} \quad (20)$$

transzformáció után a két henger koncentrikus lesz! Határozza meg a két henger sugarát!

- Vegye fel a potenciált  $F(z') = A \ln z' + B$  alakban. Határozza meg az  $A$  és  $B$  paramétereket! (Segítség: Az  $F(z')$  valós része a két henger sugarán  $U_1$  illetve  $U_2$ .)

- Írja fel a potenciált az eredeti  $z$ -síkon is.