Példák: Laplace egyenlet, változószeparáció

I. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál az xz-síkon, a másik $y = a$-nál helyezkedik el. Mindkettő $x > 0$ részre terjed ki, $x < 0$ részen vákuum van. A végüket $x = 0$-nál lezárja egy végtelen hosszú szalag, amelynek a vastagsága a, a z irányban végtelen, és az y irányban az $0 < y < a$ tartományon terjed ki. A szalag a két fémlaptól elszigetelt, a potenciálja $V_0(y)$. Számolja ki a potenciált a három felület (két fémlap és szalag) által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)

2. Egy végtelen hosszú téglalap alapú fémcső (a téglalap oldalai a és b) az $x = 0$-nál kezdődik, és az x tengely pozitív irányaban végtelen. Az $x = 0$ végén egy kis téglalap alakú szigetelő a potenciált $V_0(y, z)$ értéken tartja. Az téglalap egyik a hosszúságú oldala a z-tengelyen, a másik a z-tengellyel párhuzamosan, $y = b$-nál található, az egyik b-hosszúságú oldala pedig az y tengelyen, a másik pedig az y tengellyel párhuzamosan a $z = a$-nál található. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton! (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)

3. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással és az xz-síkkal párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál, a másik $y = a$-nál, helyezkedik el. Mindkét fémlap szegélye $x = 0$-nál van, és csak az $x > 0$ tartományban terjednek ki. A $x = 0$-nál található szegélyüket lezárja egy végtelen hosszú szalag, amely a két fémlapoktól elszigetelt, és amelynek a potenciálja V_0, ha $0 < y < a/2$, és $-V_0$ ha $a/2 < y < a$. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)

4. Egy téglalap-alapú végtelen cső négy oldalából három földelt fémlap. Ezek az $y = 0$, $y = a$, és $x = 0$-nál helyezkednek el. A negyedik, $x = b$-nél elhelyezkedő $V(y)$ potenciálon van. A cső a z irányban, mind a pozitív és negatív irányokban végtelen. Vezesse le a potenciált!

II. LAPLACE-EGYENLET GÖMBKOORDINÁTÁKBAN

Gömbkoordinátákban a Laplace egyenlet alakja

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0. \tag{1}$$

Azimutális szimmetria esetén nincs ϕ-függés. Ebben az esetben a megoldás felírható

$$\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{2}$$

alakban.

- Mutassa meg, hogy az

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{3}$$

  a radiális rész általános megoldása.

A θ-függő rész általános megoldásai a Legendre polinómok, $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$. Az első néhány Legendre polinom:

$$P_0(x) = 1 \tag{4}$$
$$P_1(x) = x \tag{5}$$
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \tag{6}$$
$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2. \tag{7}$$

A Legendre polinomokra igaz, hogy

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}. \tag{8}$$

1. Adott egy R sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál $\Phi_0(\theta)$. Határozza meg a potenciált a gömbön belül!

2. Adott egy semleges R sugarú fémgömb, amelyet $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ (homogén) külső elektromos térbe helyezünk. Határozza meg a potenciált a gömbön kívül! (Segítség: csak a $P_0(x)$ és a $P_1(x)$ Legendre polinomokra van szükség.)