Példák: Tükörtöltés módszer, Laplace egyenlet

I. KÉT PONTTÖLTÉS VEZETŐ GÖMB KÖZELÉBEN (A01)

Adott egy leföldelt R sugarú fémgömb. A gömb centruma az origóban van. A gömbön kívül az origótól $2R$ távolságra, az x és az y tengely mentén egy egy Q nagyságú töltés helyezkedik el.

1. Határozza meg a tükörtöltések nagyságát és helyét!
2. Határozza meg az x-tengelyen lévő Q töltésre ható erő irányát és nagyságát!

II. VÉGTELEN TÖLTÖTT PÁLCA FÖLDELT VEZETŐ KÖZELÉBEN (A02)

Egy λ homogén töltéssűrűséget hordozó végtelen hosszú pálca egy földelt síkvezetőtől d távolságra helyezkedik el ($z = d$). A pálca az x-tengellyel párhuzamos, a tér $z < 0$ részét földelt vezető anyag tölti ki.

1. Számolja ki a potenciált a $z > 0$ régióban.
2. Számolja ki a töltéseloszlást a vezető felületén, az xy-síkon ($z = 0$-nál).

III. TÖLTÉS FÖLDELT FÉMGÖMB KÖZELÉBEN (A03)

q nagyságú ponttöltés egy földelt R sugarú fémgömb középpontjától a távolságra van, ahol $a > R$.

1. Számolja ki a töltésre ható erőt!
2. Számolja ki mekkora munkát kellett végeznünk, hogy a töltést a végtelenből behozzuk a helyére!

IV. PLUSZ KÉRDÉSEK A GÖMBI TÜKÖRTÖLTÉSEKHEZ (B00)

A01+ Az A01 feladatban hogyan változik a töltésre ható erő erő, ha a gömböt nem földeljük le?

A03+ Az A03 feladatban egy második tükörtöltés segítségével a gömbfelület potenciálját változtathatjuk. Mekkora tükörtöltést kell a gömb belsejébe helyezni, és hova, hogy a gömbfelület potenciálja V_0 legyen? Mekkora erő hat a gömbön kívűl lévő q töltésre?

V. KÉT VEZETŐ HENGER (B01)

Két R sugarú, nagyon hosszú fémhenger tengelye metszi az x-tengely $x = d$ és $x = -d$ pontjait ($d > R$). A hengerek tengelyei a z-tengellyel párhuzamosak. Az $x = -d$ pontot metsző henger felülete $-V_0$ potenciálon van, az $x = d$ pontot metsző henger felülete pedig V_0 potenciálon. Számolja ki a potenciált a teljes térben! (Segítség: Ehhez a feladathoz célszerű először megoldani a gyakorlat VI. feladatát.)

VI. MOZGÓ PONTTÖLTÉS (B02)

Egy m tömegű q töltésű pontrészecskét egy végtelen földelt vezetőtől d távolságra rögzítünk. $t = 0$ időpontban elengedjük. Mekkora idő alatt éri el a felületet?

VII. DIPÓLUS GÖMBÖN KÍVÜL (B03)

Adott egy földelt R sugarú fémgömb. A gömb centruma az origóban van. A z-tengelyen egy p nagyságú dipólmomentumot helyezünk el, úgy, hogy a dipólus iránya a z-tengellyel α szöget zár be.

- Határozza meg az tükördipólus nagyságát és helyét!
- Határozza meg az indukált töltéssűrűséget a gömb felületének abban a pontjában ahol a gömb a z-tengelyt metszi!
- Határozza meg a dipólusra ható erőt és forgatónyomatékot az α szög függvényében!

VIII. TÖLTÖTT GYŰRŰ VEZETŐ GÖMB KÖRÜL (B04)

Adott egy földelt R sugarú fémgömb. A gömb centruma az origóban van. A gömböt az xy-síkban körülveszi egy $2R$-sugarú λ lineáris töltéssűrűséget hordozó gyűrű.

Határozza meg az elektromos térerősséget a z-tengely mentén!

További gyakorlásra

IX. LAPLACE EGYENLET MEGOLDÁSAIVAL KAPCSOLATOS TÉTELEK

Igazolja a következő állításokat!

1. Egy $\partial\mathbb{V}$ felület által körülzárt $\mathbb{V}$ töltésmentes térfogaton belül, ha a $\partial\mathbb{V}$ felületen adott a potenciál $\Phi(\mathbf{r})$, a Laplace egyenlet megoldása egyértelmű. (Segítség: Tételezzük fel, hogy nem így van, azaz két megoldás van $\Phi_1(\mathbf{r})$ és $\Phi_2(\mathbf{r})$, amelyek kielégítik a Laplace egyenletet a $\mathbb{V}$ térfogaton, de egyenlőek a $\partial\mathbb{V}$ felületen! Ezesetben a két megoldás különbsége, a $\Phi_3(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) - \Phi_1(\mathbf{r})$ függvény is megoldása a Laplace egyenletnek.)

2. Egy olyan üres térfogaton belül, amelynek a felületét vezető anyag tölti ki a potenciál állandó.

3. Egy $\partial\mathbb{V}$ felület által körülzárt $\mathbb{V}$ $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűséget hordozó térfogaton belül, ha a $\partial\mathbb{V}$ felületen adott a potenciál $\Phi(\mathbf{r})$, a Laplace egyenlet megoldása egyértelmű.

4. Adott egy térfogat $\mathbb{V}$ melyben $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűség helyezkedik el. A térfogatot vezető anyag veszi körül. A térfogaton belül is vannak kisebb zárt térfogatok $(\mathbb{V}_i, \partial\mathbb{V}_i)$, amelyeket vezető anyagok töltenek ki, és amelyek mindegyike Q_i töltést tartalmaz. Ebben az esetben az elektromos tér $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ egyértelmű. (Segítség: Tételezzük fel, hogy nem így van, azaz két megoldás van $\mathbf{E_1}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{E_2}(\mathbf{r})$, amelyek kielégítik a

$$\nabla \cdot \mathbf{E_1}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E_2}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

egyenleteket, valamint a

$$\oint_{\partial\mathbb{V}_i} \mathbf{E_1}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\partial\mathbb{V}_i} \mathbf{E_2}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}, \tag{2}$$

relációkat. A $\mathbf{E_3}(\mathbf{r}) = \mathbf{E_2}(\mathbf{r}) - \mathbf{E_1}(\mathbf{r})$ vektorfüggvényre igaz, hogy

$$\nabla \cdot \mathbf{E_3}(\mathbf{r}) = 0, \tag{3}$$

a $\mathbb{V}$ térfogaton belül, és, hogy

$$\oint \mathbf{E_3}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0, \tag{4}$$

a térfogat által tartalmazott vezetők felületeire. A potenciálfüggvény $\Phi_3(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) - \Phi_1(\mathbf{r})$ konstans a vezetők felületein. A $\Phi_3(\mathbf{r})\mathbf{E_3}(\mathbf{r})$ vektorfüggvényre alkalmazza a Gauss-tételt!)

5. Néhány mondatban igazolja **Earnshaw tételét,** mely szerint egy töltött részecskét nem lehet stabil egyensúlyban tartani kizárólag elektrosztatikus erők setítségével! Kiinduló példaként lehet venni egy a oldalú kockát, amelynek sarkaiba q töltéseket helyezünk. Lehet-e a kocka közepére töltést helyezni úgy, hogy az stabil egyensúlyban legyen?

X. LAPLACE EGYENLET, HATÁRFELTÉTELEK

Adott a töltéssűrűség ρ egy bizonyos térfogaton belül, és adott Φ vagy $\partial\Phi/\partial n$ az adott térfogaton felületén. Bizonyítsa be, hogy ezek a feltételek az elektromos teret egyértelműen definiálják!

XI. LAPLACE EGYENLET NUMERIKUS MEGOLDÁSA

A Laplace-egyenletet megoldó potenciálra igaz, hogy értéke egy tetszőleges adott $\mathbf{r}$ pontban egyenlő egy, a pont körül vett gömb potenciáljának átlagával, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{gömb}} \Phi df. \tag{5}$$

A kétdimenziós Laplace egyenlet

$$\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y^2} = 0, \tag{6}$$

egyik lehetséges megoldása a numerikus **relaxációs módszer**. Ez egy grid-alapú iterációs módszer, amely a fenti állításon alapszik. Az adott térfogaton belül felveszünk egy rácsot. Választunk egy kezdeti függvényt, amely a határfelület rácspontjain megfelel az adott határfeltételnek, azon belül tetszőleges. Minden egyes iteratív lépésben, mindegyik nem a határon található rácsponton a potenciált újraszamoljuk, mint a rácspont közvetlen szomszédjainak átlagát.

Számítsa ki a potenciált a $[0, 10] \times [0, 10]$ négyzeten belül egy 100×100-as rácson a következő határfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= 2x^2 \\ \Phi(10, y) &= 200 - y^2 \\ \Phi(x, 10) &= x^2 \\ \Phi(0, y) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

XII. TÖLTÉS EGY DERÉKSZÖGŰ ÜREGBEN

A tér egy részét földelt vezető tölti ki, a következőképen. A z-tengellyel párhuzamosan nézve, tetszőleges z-nél az xy sík pozitív negyede üres, viszont az összes többi negyedet kitölti a vezető anyag. Az anyagot határoló két síkfelület az xz és az yz tengelyeken találhatók, derékszögben találkoznak egymással. A z-tengelyen haladva a rendszer szimmetrikus (transzlációs szimmetria), azaz, az elrendezés változatlan a z-tengely mentén.

Az xy síkra, $z = 0$-ban az $(a, b, 0)$ pontban egy q nagyságú ponttöltést helyezünk el.

1. Számolja ki a potenciált az xy sík pozitív negyedében.

2. Mekkora erő hat a q töltésre?
3. Mekkora munka kell ahhoz, hogy a q töltést a végtelenből az $(a, b, 0)$ pontra helyezzük?
4. Ha a teret betöltő vezető anyagot határoló síkok nem derékszöben találkoznak, hanem valamilyen más, θ szögben, akkor megoldható-e a feladat tükörtöltések segítségével? Milyen szögek esetében lehetséges ez?

XIII. KÉT TÖLTÖTT PÁLCA, EGY VEZETŐ HENGER

Két végtelen hosszú pálca, az egyik λ töltéssűrűséget hordoz, a másik $-\lambda$-t, egy vezető henger két oldalán helyezkedik el. A henger sugara R, teljes töltése nulla. A pálcák a henger tengelyétől a távolságra helyezkednek el. A két pálca, és a henger tengelye párhuzamosak, és egy síkot alkotnak.

Számolja ki az elrendezés potenciálját!

XIV. TÖLTÉS FÉMGÖMBHÉJON BELÜLI ÜREGBEN

Adott egy szabadon álló fémgömbhéj. A külső gömb sugara b, a belsőé a. Az a sugarú gömbön belül, az origótól d távolságra (a z tengelyen) egy töltés helyezkedik el.

- Tükörtöltés módszerrel határozza meg a q töltésre ható erőt!
- Határozza meg az üreg falán indukálódott töltéssűrűséget! A felületen egy pont helyét a sugárnak a pontöltést a centrummal összekötő egyenessel bezárt α szög adja meg. Azaz, határozza meg a $\sigma(\alpha)$ függvényt!
- Határozza meg az elektrosztatikus térerősséget a gömbhéjon kívüli térrészben!
- Rajzolja fel az elektroszatitkus tér erővonalrendszerét a teljes térben!

XV. GÖMB SÍK KÖZELÉBEN

A $z = 0$ $xy-$síkon egy végtelen kiterjedésű földelt fémlap van. A z-tengely mentén a $z = h$ pontban egy $R < h$ sugarú gömb helyezkedik el, amelyen Q töltés van.

A feladat a potenciál kiszámolása. Ehhez többszörös tükrözést kell alkalmazni. Legyen Φ_G a gömbfelület, Φ_S a sík potenciálja.

1. Tegyen egy Q_1 fiktív töltést a gömb középpontjába. Ekkor Φ_G állandó (ekvipotenciális), de a síkfelület nem, azaz Φ_S nem állandó.
2. Tükrözze a síkra a Q_1 töltést! Jegyezze fel a tükörtöltés helyét! Ekkot Φ_S állandó, de a Φ_G nem.
3. Tükrözze a $-Q_1$ töltést a gömbre. Az így kapott, gömbön belüli töltést jelölje Q_2. Jegyezze fel a Q_2 helyét. Ekkor a Φ_G állandó lesz, de a Φ_S nem.
4. Tükrözze a síkra a Q_2 töltést! Jegyezze fel a tükörtöltés helyét! Ekkot Φ_S állandó, de a Φ_G nem.
5. Tükrözze a $-Q_2$ töltést a gömbre. Az így kapott, gömbön belüli töltést jelölje Q_3. Jegyezze fel a Q_3 helyét. Ekkor a Φ_G állandó lesz, de a Φ_S nem.

Ez így folytatható lenne a végtelenségig. Tekintsük az eddigi tükrözési láncot! Ez egy adott közelítést jelent. Számolja ki a potenciált ebben a közelítésben!

XVI. PONTTÖLTÉS KÉT SÍKFELÜLET KÖZÖTT

Két földelt végtelen síkfelületet a távolságba helyezünk egymástól. A síkok párhuzamosak. A két sík közé, az egyik síktól x távolságra egy ponttöltést helyezünk.

- Írja fel a potenciálfüggvényt a két sík között! Elemezze az $a \to \infty$ limesz esetét.

Erre a kérdésre a válasz egy végtelen szumma. Mivel a szumma tagjai változó előjelűek, a szumma *feltételesen* konvergens. A szumma más értékekhez konvergálhat, attól függően, hogy milyen sorrendben adjuk össze az egyes tagokat.

A szumma bizonyos tagjainak elhanyagolásával közelítésekhez juthatunk. Bár matematikailag a szumma feltételesen konvergens, egy fizikai kritérium alapján eltekinthetünk bizonyos tagoktól, pl. ha választunk egy küszöbértéket, ϵ-t, és csak az olyan tagokat tartjuk meg amelyek abszolút értéke legalább ϵ. Ez ahhoz vezet, hogy a tükrözések során az első mondjuk $2N$ lépésben adódó tükörtöltéseket tarjuk meg, ahol $N = 1, 2, 3, \ldots$.

Vannak más megoldások is, amelyeknél a potenciált nehezebb felírni, viszont a szumma maga nem csak feltételesen konvergens.

- Legyen két R sugarú gömb középpontja egymástól $2R + a$ távolságra, azaz, a gömbök középpontjait összekötő egyenes mentén a két gömb felületét metsző két pont egymástól a távolságra van. Az q töltést az egyik metszésponttól x távolságra helyezzük. A tükörtöltés módszer alkalmazásával itt is egy végtelen sort kapunk a potenciálra. Ahhoz, hogy az eredeti konfigurációt (két síkfelület közötti töltés) visszakapjuk, az $R \to \infty$ limeszt kell venni, úgy, hogy a két gömb közötti a távolság konstans marad.
- Legyen egy R és egy $R + a$ sugarú koncentrikus gömbhéj között, az origótól $R + x$ távolságra egy

q ponttöltés. A tükörtöltés módszerrel itt is végtelen szummát kapunk. Ahhoz, hogy az eredeti konfigurációt (két síkfelület közötti töltés) visszakapjuk, az $R \to \infty$ limeszt kell venni, úgy, hogy a két gömbhéj közötti a távolság konstans marad.

- Ha a XII feladat megoldásából indulunk ki, azaz veszünk egy π/n szögű üreget. Az üregben lévő ponttöltés pozícióját írjuk fel poláris koordinátákban,

$$x = \rho\alpha \tag{8}$$
$$a - x = \rho\beta \tag{9}$$
$$a = \rho\pi/n. \tag{10}$$

A releváns limesz a $\rho \to \infty$, $n \to \infty$.