

Példák: Tükörtöltés módszer, Laplace egyenlet

I. PONTTÖLTÉS FÖLDELT VEZETŐ KÖZELÉBEN

A z -tengelyen két pont töltés helyezkedik el, q nagyságú $z = 3d$ pontban, $-2q$ nagyságú pedig a $z = d$ pontban. Az xy -sík alatti ($z < 0$) teret homogén földelt vezető tölti ki. Mekkora erő hat a q töltésre?

II. TÖLTÉS FÖLDELT FÉMGÖMB KÖZELÉBEN

q nagyságú ponttöltés egy földelt R sugarú fémgömb középpontjától a távolságra van, ahol $a > R$.

1. Számolja ki a potenciált a gömbön kívül!
2. Számolja ki a gömbön indukált felületi töltéssűrűséget a gömbi θ -szög függvényében. Integrálja ki ezt a kifejezést, azaz, számolja ki a teljes, a gömb felületén, indukált töltést! (Útmutatás: az integrál értékét explicit számolás nélkül is meg lehet mondani Maxwell törvényei alapján!)
3. Mi a különbség, ha a gömb nem földelt, hanem izolált?

III. TÖLTÉS EGY DERÉKSZÖGŰ ÜREGBEN

A tér egy részét földelt vezető tölti ki, a következőképpen. A z -tengellyel párhuzamosan nézve, tetszőleges z -nél az xy sík pozitív negyede üres, viszont az összes többi negyedre a vezető anyag. Az anyagot határoló két síkfelület az xz és az yz tengelyeken található, derékszögben találkoznak egymással. A z -tengelyen haladva a rendszer szimmetrikus (transzlációs szimmetria), azaz, az elrendezés változatlan a z -tengely mentén.

Az xy síkra, $z = 0$ -ban az $(a, b, 0)$ pontban egy q nagyságú ponttöltést helyezünk el.

1. Számolja ki a potenciált az xy sík pozitív negyedében!
2. Mekkora erő hat a q töltésre?
3. Mekkora munka kell ahhoz, hogy a q töltést a végtelenből az $(a, b, 0)$ pontra helyezzük?

IV. VEZETŐ GÖMB KONSTANS ELEKTROMOS TÉRBEN

Az R sugarú földelt vezető gömb konstans elektromos térben problémája is megoldható a tükörtöltés

módszerrel. Legyen a gömb középpontja az origó. Helyezzünk egy $-q$ töltést a z tengelyre az origótól $a > R$ távolságban, valamint egy $+q$ töltést a $z = -a$ pontra. A gömbön kívüli tér meghatározható, mint a két eredeti töltés, és a két tükörtöltés tere. Ahhoz hogy konstans teret hozzunk létre a gömb körüli tartományban, a két eredeti töltéssel a végtelenbe kell tartani (a $-q$ -val a $+\infty$ -be, a $+q$ -val a $-\infty$ -be), úgy hogy közben q/a^2 konstans.

Határozza meg a gömbön kívüli potenciált és elektromos teret, ha egy R sugarú vezető földelt gömböt E erősségű konstans elektromos térbe helyezünk! Az eredeti tér a $+z$ irányba mutat.

Ha a gömb felületén a potenciál V_0 , miként módosulnak a fenti mennyiségek?

V. KÉT VÉGTELEN HOSSZÚ VONALTÖLTÉS

Adott egy $-\lambda$ és egy λ töltéssűrűségű végtelen pálca, amelyek a z -tengellyel párhuzamosak, és az $x = -a$, valamint az $x = a$ pontokat metszik. Bizonyítsa be, hogy ennek a töltésselrendezésnek az ekvipotenciális felületi hengerek! Számolja ki a hengerek sugarait és tengelyeinek koordinátáit!

VI. LAPLACE EGYENLET MEGOLDÁSÁNAK ÁTLAGOLÁSI TULAJDONSÁGA

A Laplace egyenlet:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

ahol $\Phi(\mathbf{r})$ a keresett elektrosztatikus potenciál.

A Laplace egyenlet megoldására igaz a következő két állítás:

- A potenciál értéke egy adott \mathbf{r} pontban egyenlő egy, a pont körül vett, gömb potenciáljának átlagával, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{gömb}} \Phi df. \quad (2)$$

A gömbnek teljesen a zárt felületen belül kell lennie, azaz nem tartalmazhat töltéseket. A töltések, amelyek a $\Phi(\mathbf{r})$ potenciált létrehozzák mind a gömbön kívül helyezkednek el.

- Az előbbi állítás következménye, hogy a $\Phi(\mathbf{r})$ függvénynek a zárt felületen belül nem lehetnek lokális minimumai vagy maximumai, ezek mind a határfelületen találhatóak.

Feladatok:

1. A fenti két állítás a dimenziók számától függetlenül igaz. Oldja meg a Laplace egyenletet az egy dimenziós esetben, azaz keresse meg a

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

egyenlet megoldását, ha adott egy egydimenziós térfogat 0 és L között! Igazolja a fenti két állítást! Melyek a lehetséges határfeltételek?

2. A három-dimenziós esetben bizonyítsa az első állítást! Adott egy ponttöltés az origótól a távolságra. Bizonyítsa be, hogy a potenciál az origóban egyenlő egy $R < a$ sugarú gömb

átlagpotenciáljával. A gömb központja az origó.

3. Vezesse le a gömb átlagpotenciálját abban az esetben, ha a töltés a gömbön belül van, azaz $a < R$!

VII. PONTTÖLTÉS KÉT SÍKFELÜLET KÖZÖTT

Két földelt végtelen síkfelületet a távolságba helyezünk egymástól. A síkok párhuzamosak. A két sík közé, az egyik síktól x távolságra egy ponttöltést helyezünk. Mekkora a q -ra ható erő? Ellenőrizze az $a \rightarrow \infty$, és az $x = a/2$ eseteket!