Példák: Coulomb törvény, elektromos tér, potenciál

I. INHOMOGÉN GÖMBSZIMMETRIKUS TÖLTÉSELOSZLÁS (A01)

Adott egy R sugarú gömb a következő gömbszimmetrikus töltéssűrűséggel:

$$\rho(r) = \rho_0 (1 - \frac{r^2}{R^2}). \tag{1}$$

1. Határozza meg a ρ töltéssűrűség által keltett $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ térerősséget mindenhol a térben! Rajzolja fel az $E(r)$ függvényt!
2. A $E(r)$ ismeretében határozza meg a $\Phi(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a $\Phi(r)$ függvényt!
3. A ρ és a $\Phi(r)$ felhasználásával határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!
4. Az $E(r)$ ismeretében határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!

II. KÉT KONCENTRIKUS TÖLTÖTT GÖMBFELÜLET (A02)

Adott két koncentrikus vékony gömbhéj a és b sugárral. A belsőn q, a külsőn pedig $-q$ töltés van egyenletesen elosztva.

1. Határozza meg a $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ térerősséget mindenhol a térben! Rajzolja fel az $E(r)$ függvényt!
2. A $E(r)$ ismeretében határozza meg a $\Phi(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a $\Phi(r)$ függvényt!
3. A $\Phi(r)$ felhasználásával határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!
4. Az $E(r)$ ismeretében határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!

III. TÖLTÖTT GÖMBHÉJ (A03)

Adott egy gömbhéj a következő gömbszimmetrikus töltéssűrűséggel:

$$\rho(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{r^2} & \text{ha } a < r < b \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2}$$

1. Határozza meg a ρ töltéssűrűség által keltett $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ térerősséget mindenhol a térben! Rajzolja fel az $E(r)$ függvényt!
2. A $E(r)$ ismeretében határozza meg a $\Phi(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a $\Phi(r)$ függvényt!
3. A ρ és a $\Phi(r)$ felhasználásával határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!
4. Az $E(r)$ ismeretében határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját!

IV. KÉT KONCENTRIKUS HENGERFELÜLET (B01)

Adott két, végtelen hosszú koncentrikus hengerfelület. A hengerek forgástengelye a z koordinátatengely és a sugaruk $R_2 > R_1$. A belső hengerfelületen belül egyenletes ρ_1 pozitív térfogati töltéssűrűség van. A külső hengerfelületen egyenletes $-\sigma_2$ negatív felületi töltéssűrűség helyezkedik el. A töltéselrendezés hosszegységre eső össztöltése zérus.

1. Határozza meg a ρ_1 térfogati töltéssűrűség által keltett $E_1(r)$ térerősséget és a $\Phi_1(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a kapott függvényeket!
2. Határozza meg a $-\sigma_2$ felületi töltéssűrűség által keltett $E_2(r)$ térerősséget és a $\Phi_2(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a kapott függvényeket!
3. Rajzolja fel a teljes térerősséget és a teljes potenciált!
4. A kapott eredmények alapján határozza meg a töltésrendszer hosszegységre eső W összenergiáját!

V. SÍK DIÓDA (B02)

Az ún. *sík dióda* egyszerű modellje a következő. Adott két, igen nagynak tekinthető, egymással párhuzamos vezető sík. A két síklapra V feszültséget kapcsolunk. A lapok közötti a távolság a síklapok lineáris méreténél sokkal kisebb. Ezért a lapok pereménél fellépő szélhatások elhanyagolhatók. Az egyik síklapból (nevezzük ezt katódnak!) nulla kezdősebességűnek tekinthető elektronok lépnek ki (például izzítás hatására). Ennek következtében a lapok közötti térben egy $\rho(r)$ térbeli töltéssűrűség alakul ki. (Ez az ún. *tértöltéses tartomány*). Az elrendezés szimmtriájából adódik, hogy minden fizikai mennyiség csak a lapokra merőleges x tengely mentén változik.

A vizsgált jelenség tehát egy egydimenziós feladatként kezelhető. A továbbiakban a rendszer *stacionárius* állapotát vizsgáljuk. Ekkor a lapok közötti térben állandó nagyságú I áram folyik és minden fizikai mennyiség időfüggetlen. Keressük tehát a $\Phi(x)$ elektromos potenciál, a $\rho(x)$ töltéssűrűség és az elektronok $v(x)$ sebesség függvényét. Legyen $\Phi(0) = 0$ és $\Phi(a) = V$. A cél, a rendszerre jellemző I(V) áram-feszültség karakterisztika meghatározása.

1. Írja fel az (egydimenziós) Poisson egyenletet a lemezek közötti térben!

2. Az I áram ismeretében adja meg a $\rho(x)$ és a $v(x)$ kapcsolatát!

3. Az elektronok dinamikája alapján adja meg a $\Phi(x)$ és a $v(x)$ függvények közötti kapcsolatot!

4. Az eddigiek felhasználásával mutassa meg, hogy a következő differenciálegyenletre jutunk:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = \frac{C}{\sqrt{\Phi}}, \tag{3}$$

   ahol C egy konstans.

5. Keresse a $\Phi(x)$ függvényt αx^n hatványfüggvény alakban és határozza meg az n kitevőt. A szóban forgó (önkényesnek tűnő) hatványfüggvényt miért indokolja az a feltétel, hogy a katódból nulla kezdősebességűnek tekinthető elektronok lépnek ki?

6. Az eddigi eredmények alapján határozza meg az elrendezés $I(V)$ *áram–feszültség* karakterisztikáját!

7. Miért nevezzük ezt *diódának*?

(Megjegyzés : A V feszültség pozitív *és* negatív *is lehet. A kapott összefüggés az ún.* Langmuir–Child *formula, amely elég jól megadta az izzókatódos diódák (elektroncső) karakterisztikáját.)*

VI. HIDROGÉN ALAPÁLLAPOT (B03)

Adott a következő töltéselrendeződés:

$$\rho(r) = \rho_+(r) + \rho_-(r) = q_e\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{q_e}{8\pi a_0^3}e^{-r/a_0} \tag{4}$$

1. Határozza meg a rendszer össztöltését!

2. A megfelelő Laplace egyenlet megoldásával határozza meg a ρ_+ töltéssűrűség által létrehozott $\Phi_+(r)$ és a ρ_- töltéssűrűség által létrehozott $\Phi_-(r)$ potenciált!

3. Határozza meg és rajzolja fel a teljes töltésrendszer eredő $\Phi(r)$ potenciálját!
4. Tételezzük fel, hogy csak az imént kapott $\Phi(r)$ potenciálfüggvényt ismerjük. A megfelelő Laplace egyenlet segítségével határozza meg a teret létrehozó $\rho(r)$ töltéssűrűséget!

5. Hova tűnt az így kapott $\rho(r)$-ből a ponttöltés? Alakítsa át úgy a Laplace egyenletet, hogy megjelenjen benne a $\Delta\frac{1}{r}$ kifejezés és számítsa ki újra a töltéssűrűséget!

6. A $\rho(r)$ és $\Phi(r)$ ismeretében határozza meg a szóban forgó rendszer W elektrosztatikus energiáját! Definíció szerint melyik tagot kell elhagynunk? Az energia ismeretében tegyen megállapításokat a töltésrendszer térbeli stabilitására!