Példák: Coulomb törvény, elektromos tér, potenciál

I. INHOMOGÉN GÖMBSZIMMETRIKUS TÖLTÉSELOSZLÁS (A01)

Adott egy gömbszimmetrikus töltéselrendezés. A hozzátartozó $\Phi(r)$ elektromos potenciálfüggvény a következő,

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_0 \left(\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) & \text{ha } 0 < r \leq R \\ 0 & \text{ha } R < r. \end{cases} \tag{1}$$

1. Rajzolja fel a $\Phi(r)$ függvényt!
2. Határozza meg a $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősséget mindenhol a térben!
3. Rajzolja fel az $E(r)$ függvényt!
4. Milyen töltéselrendezés hozza létre a szóban forgó teret?

II. TÖLTÖTT PÁLCA A z-TENGELY MENTÉN (A02)

Adott a z tengely mentén egy egyenletes vonaltöltés,

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{ha } -a \leq z \leq 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2}$$

1. Határozza meg (a Coulomb törvény segítségével) az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos teret a z-tengely mentén a $z > 0$ szakaszon!
2. Az infinitezimális λdz szakaszon lévő $d\Phi$ potenciáljainak szuperpozíciójával határozza meg a $\Phi(z)$ potenciálfüggvényt a z tengely mentén a $z > 0$ szakaszon!
3. Mutassa meg, hogy teljesül az $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ összefüggés!
4. Határozza meg, hogy milyen függvény szerint változik az $E(z)$ és a $\Phi(z)$, ha $a << z$!

III. SZÖGTŐL FÜGGŐ INHOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁS (A03)

Adott egy R sugarú körvonal. A kör centruma az origóban van, és (így) az egyik átmérője az x tengelyre illeszkedik. Legyen θ a sugárnak az x-tengellyel bezárt szöge. A körvonalon egy változó $\lambda(\theta)$ lineáris töltéssűrűség helyezkedik el, a következő képen:

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos(\theta), \tag{3}$$

ahol λ_0 egy állandó érték.

1. Határozza meg az elektromos térerősséget a kör centrumában!
2. Határozza meg az elektromos potenciált a kör centrumában!

IV. FÉLGÖMBHÉJ ELEKTROMOS POTENCIÁLJA (B01)

Adott egy fél gömbhéj, amelyen egyenletes σ_0 felületi eloszlásban összesen $+Q$ töltés helyezkedik el. A gömb középpontja az origóban van. Legyen a z tengely a félgömbhéj forgástengelye! A héj a z irányban domborodik. (Azaz a $z > R$ helyen a gömbhéjat domborúnak látjuk.)

1. Írja fel az elektromos potenciált egy b sugarú, egyenletesen töltött körvonal tengelye mentén.
2. A félgömbhéj körgyűrűk sokaságára bontható. Ezek elektrosztatikus hatása összeadódik. Határozza meg a töltött félgömbhéj által létrehozott $\Phi(z)$ elektromos potenciált a $z > R$ szakaszon.
3. Illesszünk össze két ilyen egyforma gömbhéjat! A második részfeladatban kapott eredmény felhasználásával (illetve annak alkalmas módosításával) számolja ki a potenciális energiát a $z > R$ pontban!

V. PONTTÖLTÉSEK: COULOMB ERŐ (B02)

1. Tizenkettő ponttöltés, q, egy szabályos tizenkétszög csúcsain helyezkedik el (pl. mindegyik egy óralap számán). Mi a nettó elektromos erő egy tizenharmadik, Q töltésen, ha azt a tizenkétszög középpontjába helyezzük?
2. Az óralap hatos számán lévő q ponttöltést eltávolítjuk. Mekkora az erő a Q töltésen?
3. Tizenhárom ponttöltés, q, egy szabályos tizenháromszög csúcsain helyezkedik el. Mi a nettó elektromos erő egy tizennegyedik, Q töltésen, ha azt a tizenháromszög középpontjába helyezzük?
4. Az egyik q ponttöltést eltávolítjuk. Mekkora az erő a Q töltésen?

VI. TÖLTÖTT GÖMBFELÜLET ELEKTROMOS TERE EXPLICIT INTEGRÁLÁSSAL (B03)

1. Adott egy R sugarú gömb melynek a felületén σ homogén sűrűségű töltés helyezkedik el. Számítsa ki az elektromos teret a gömb középpontjától z távolságban a
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{4}$$
definíció segítségével, azaz a gömb felület egy infiniteszimális eleme járulékának felírásával, és ezen kifejezés kiintegrálásával. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.

2. A fenti eredmény alapján számítsa ki egy R sugarú gömb elektromos terét, melynek teljes térfogatában ρ homogén töltéssűrűség helyezkedik el. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a megoldása jóval egyszerűbb, ha a Gauss tételt alkalmazzuk.

További gyakorlásra

VII. FLUXUS

q töltést az origóba helyezünk. Számolja ki a $[(a,a,a),(a,a,0),(0,a,0),(0,a,a)]$ pontok által körülzárt négyzetet keresztező elektromos fluxust!

VIII. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK EXPLICIT INTEGRÁLÁSSAL

Számolja ki a következő rendszer elektromos térerősségét és potenciálját a megadott pontokban:

Adott négy λ mennyiségű homogén töltéssűrűségű, L hosszúságú pálca, amelyből egy szabályos négyzetet alkotunk amelynek az oldalhosszúsága L. A pont legyen a négyzet középpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z >> L$ esetet!

Ellenőrizze az $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$ összefüggést!

IX. TÖLTÖTT GÖMBFELÜLET ELEKTROMOS TERE: GAUSS TÉTEL

1. Adott egy R sugarú gömb melynek a felületén σ homogén sűrűségű töltés helyezkedik el. Számítsa ki az elektromos teret a gömb középpontjától z távolságban a Gauss tétel segítségével. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.

2. A fenti eredmény alapján számítsa ki egy R sugarú gömb elektromos terét, melynek teljes térfogatában ρ homogén töltéssűrűség helyezkedik el. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.

Megjegyzés: Egy R sugarú gömbön belül lokalizált, gömbszimmetrikus töltéseloszlás tere az $r > R$ esetre ugyanaz mint egy az origóban lévő Q ponttöltés tere, ahol Q az R sugaron belül kiintegrált teljes töltés.

X. GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSA: ZÁRT FELÜLET ÁLTAL TARTALMAZOTT TÖLTÉS

Számolja ki az elektromos teret a következő esetekben. Készítsen vázlatot is róla a releváns távolság függvényében.

1. ρ homogén töltéssűrűségű, R sugarú gömb esetében, az origótól r távolságra.
2. ρ homogén töltéssűrűségű, R sugarú, és végtelen hosszúságú henger esetében, a henger tengelyétől r távolságra.
3. ρ homogén töltéssűrűségű, d vastagságú, x és y irányban kiterjedésű lemez esetében, az origótól z távolságra.

XI. GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSA: INHOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁSOK

Számolja ki az elektromos teret a következő esetekben. Készítsen vázlatot is róla a relenváns távolság függvényében.

1. $\rho(r) = \alpha r$ inhomogén töltéssűrűségű, R sugarú, és végtelen hosszúságú henger esetében, a henger tengelyétől r távolságra.
2. $\rho = az$ inhomogén töltéssűrűségű, d vastagságú, x és y irányban kiterjedésű lemez esetében, az origótól z távolságra.

XII. KÉT TÖLTÖTT GÖMB

Két R sugarú gömböt az egyik ρ, a másik $-\rho$ homogén töltéseloszlással úgy helyezünk el, hogy közöttük atfedés van. Legyen a pozitív töltésű gömb középpontjától a negatív töltésű gömb középpontjáig mutató vektor $\mathbf{b}$. Számolja ki az elektromos teret az atfedési térfogatban.

XIII. HENGER ELEKTROMOS TERE

Adott egy R sugarú, d hosszúságú henger, ρ homogén töltéseloszlással.

1. Számolja ki a henger elektromos térerősségét a henger tengelye mentén, a henger töltésközéppontjától z távolságra, ha $z > d$.

2. Számolja ki a henger potenciálját a henger tengelye mentén, a henger töltésközéppontjától z távolságra, ha $z > d$ és ellenőrizze, hogy ebből visszakapható a térerősségre az 1. pontban kapott eredmény!

XIV. POTENCIÁL ÉS ELEKTROMOS TÉR

Az alábbi két vektorfüggvény közül az egyik nem írhat le elektromos teret,

- $\mathbf{E} = k[xy\mathbf{x} + 2yz\mathbf{y} + 3xz\mathbf{z}]$,
- $\mathbf{E} = k[y^2\mathbf{x} + (2xy + z^2)\mathbf{y} + 2yz\mathbf{z}]$,

ahol k egy megfelelő egységekben megadott együttható. Melyik nem írhat le egy elektromos teret? Amelyik leírhat egy elektromos teret, ahhoz számolja ki a potenciálfüggvényt! A potenciált az origóban vegyük nullának.

XV. GÖMB TÉRFOGATI ÉS FELÜLETI TÖLTÉSSEL

Adott egy R sugarú gömb amelynek térfogati töltéssűrűsége ρ, felületi töltéssűrűsége σ. Számolja kia gömb elektromos terét valamint potenciálját az $r < R$ és $r > R$ régiókban. Igazolja, hogy a felületi töltéssűrűség az elektromos térerősség normális komponensében $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ nagyságú ugrást okoz.

XVI. TÖLTÉS VEZETŐN BELÜLI ÜREGBEN

Adott egy R sugarú fémgömb melyben egy üreg található. Az üreg nem tartalmazza a gömb középpontját, viszont tartalmaz egy q nagyságú töltést az origótól a távolságra. Mi az elektromos tér a gömbön kívül? Miért nem függ az üreg alakjától vagy elhelyezkedésétől?

XVII. MI LENNE, HA A COULOMB-TÖRVÉNY TÉVES LENNE?

Képzeljük el, hogy egy új, a mainál sokkal precízebb technikával készült mérés azt az eredményt mutatja, hogy a Coulomb törvény a valóságban nem pontosan érvényes. A kisérlet szerint két töltés közötti erő

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)e^{-r/\lambda}\hat{r}, \tag{5}$$

ahol λ egy új konstans (egy hossz, amely, tegyük fel, hogy az univerzum rádiuszának a fele, tehát a Coulomb törvény csak csekély korrekcióra szorul). A feladat az elektrosztatika törvényeinek átírása az új eredményeknek megfelelően. Feltesszük, hogy a szuperpozíció elve továbbra is érvényes.

1. Mi egy $\rho(\mathbf{r})$ töltéseloszlás elektromos tere?
2. Ez az elektromos tér levezethető-e egy Φ skalárpotenciálból?
3. Számolja ki egy ponttöltés potenciálját!
4. Egy, az origóban található q ponttöltés esetére mutassa meg, hogy
$$\oint_{\partial\mathbb{V}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{V}}\Phi d^3\mathbf{r} = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{6}$$
5. és hogy az előbbi eredményt a
$$\oint_{\partial\mathbb{V}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{V}}\Phi d^3\mathbf{r} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{7}$$

egyenletre lehet általánosítani, ahol Q a $\mathbb{V}$ térfogatban található össztöltés!

XVIII. ELEKTROMOS TÉR → TÖLTÉSSŰRŰSÉG

Adott a következő elektromos tér:

$$E_x = x, E_y = 0, E_z = 0, \tag{8}$$

ahol a egy konstans. Mi a töltéssűrűség $\rho(\mathbf{r})$? Mi a magyarázata annak, hogy az elektromos tér anizotróp, de a ρ homogén?