Vektor kalkulus - ismétlés

Jelölések:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f &= \nabla f \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

ahol

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

a nabla operátor, $\cdot$ a skaláris és $\times$ a vektoriális szorzatot jelöli. A Laplace operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

I. HÁZI FELADAT

A. Feladat (A típus)

Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat!

1.
$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

2.
$$\nabla \times (f\mathbf{v}) = f\nabla \times \mathbf{v} + \nabla f \times \mathbf{v}$$

B. Feladat (A típus)

1. Legyen $T = xy^2$ egy három dimenzióban (x, y, z) definiált skalárfüggvény. Legyen $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ és $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$. Tekintsük azt a görbét, amit az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közötti egyenes szakasz alkot. Ellenőrizze a gradienstétel érvényességét, azaz, hogy a skalárfüggvény gradiensének vonalmenti integrálja az adott görbe mentén egyezik a $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a})$ mennyiséggel!

C. Feladat (A típus)

Mutassa meg a következő azonosságot! Az $\int_{\mathbb{V}} ...d^3\mathbf{r}$, $\int_{\mathbb{F}} ...d^2\mathbf{f}$, $\int_{\mathbb{C}} ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

$$\int_{\mathbb{V}} \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})d^3\mathbf{r} = \int_{\mathbb{V}} \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})d^3\mathbf{r} + \int_{\mathbb{F}} (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d^2\mathbf{f}. \tag{1}$$

D. Feladat (B típus)

Számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_{\mathbb{V}} |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2\delta^3(5\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{2}$$

ahol $\mathbb{V}$ egy kocka amelynek éle 2, és amelynek középpontja az origó, és $\mathbf{b} = 4\hat{y} + 3\hat{z}$.

E. Feladat (B típus)

Számolja ki a

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \tag{3}$$

függvény divergenciáját, és ellenőrizze a divergenciatétel érvényességét. Van az origóban delta függvény, ahogy az $\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ függvény esetében? Mi az általános formula az $r^n\hat{\mathbf{r}}$ függvény divergenciájára?

II. TOVÁBBI GYAKORLÁSRA

A. Feladat

Adott a következő vektormező:

$$\mathbf{v} = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (2yz)\hat{\mathbf{z}}, \tag{4}$$

ahol $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ az különböző irányú egységvektorokat jelöli. Adott ezenkívül a következő térfogat: egy egységnyi oldalú kocka, amelynek az egyik sarka az origóban, három éle pedig a pozitív x, y, z tengelyek mentén találhatók.

1. Számolja ki a vektormező divergenciáját!

2. Ellenőrizze a Gauss-tétel érvényességét erre a vektorfüggvényre az adott térfogaton!

B. Feladat

Mutassa meg a következő azonosságot!

$$\int_{\mathbb{F}} f(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d^2\mathbf{f} = \int_{\mathbb{F}} [\mathbf{A}\times\nabla f]\cdot d^2\mathbf{f} + \int_{\mathbb{C}} f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{5}$$

Az $\int_{\mathbb{V}} ...d^3\mathbf{r}$, $\int_{\mathbb{F}} ...d^2\mathbf{f}$, $\int_{\mathbb{C}} ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

C. Feladat

Bizonyítsa be a következő állításokat! Az $\int_{\mathbb{V}} ...d^3\mathbf{r}$, $\int_{\mathbb{F}} ...d^2\mathbf{f}$, $\int_{\mathbb{C}} ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1. $\int_{\mathbb{V}} (\nabla \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} = -\oint_{\partial\mathbb{V}} \mathbf{v} \times d^2\mathbf{f}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{c}$-t kifejezésre (ahol $\mathbf{c}$ egy konstans vektor). }

2. $\int_{\mathbb{V}} [T\nabla^2 U - U\nabla^2 T] d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial\mathbb{V}} (T\nabla U - U\nabla T) \cdot d^2\mathbf{f}$

   {Megjegyzés: Ez **Green 2. azonossága**.}

3. $\int_{\mathbb{F}} \nabla T \cdot d^2\mathbf{f} = -\oint_{\partial\mathbb{F}} T \times d\mathbf{l}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Stokes tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ kifejezésre (ahol $\mathbf{c}$ egy konstans vektor).}

D. Feladat

Számolja ki az alábbi integrálokat!

1. $\int_{\mathbb{V}} d\mathbf{r}(r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + a^2)\delta^3(\mathbf{r})$, ahol $\mathbf{a}$ egy fix vektor amelynek hossza a. $\mathbb{V}$ végtelen térfogat.

2. $\int_{\mathbb{V}} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{r})\delta^3(\mathbf{e} - \mathbf{r}) d\mathbf{r}$, ahol $\mathbf{d} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{e} = (3, 2, 1)$, és $\mathbb{V}$ egy 1.5 egység sugarú gömb, amelynek közeppontja $(2, 2, 2)$.

3. $\int_{\mathbb{V}} e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) d\mathbf{r}$, ahol $\mathbb{V}$ egy R sugarú gömb amelynek középpontja az origó.

E. Feladat

Számolja ki az $r^n\hat{\mathbf{r}}$ függvény rotációját. Ellenőrizze az eredményt a

$$\int_{\mathbb{V}} (\nabla \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} = -\oint_{\partial\mathbb{V}} \mathbf{v} \times d^2\mathbf{f} \tag{6}$$

identitás segítségével.

F. Feladat

A

$$\mathbf{a} = \int_{\mathbb{F}} d^2\mathbf{f} \tag{7}$$

integrált az $\mathbb{F}$ felület **vektorfelületének** hívják. Ha $\mathbb{F}$ egy sík felület, akkor $|\mathbf{a}|$ a szokásos (skalár) felület.

- Szamítsa ki egy R sugarú félgömb vektorfelületét.

- Mutassa meg, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ bármely zárt felületre.

  {Javaslat: Alkalmazza a

  $$\int_{\mathbb{V}} (\nabla T) d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial\mathbb{V}} T d^2\mathbf{f} \tag{8}$$

  identitást.}

- Mutassa meg, hogy

  $$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}, \tag{9}$$

  ahol az integrál a felület kerülete.

  {Javaslat: Egy lehetséges megoldás, ha felrajzoljuk a felület és az origó által alkotott tölcsért. A tölcsér felületét fel lehet osztani infiniteszimális háromszögekre. A háromszögeket az origó, és egy adott $d\mathbf{l}$ útszakasz két vége alkotják. Erre lehet alkalmazni a keresztszorzat geometriai értelmezését. }

- Mutassa meg, hogy

  $$\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \tag{10}$$

  ahol $\mathbf{c}$ egy konstans vektor.

  {Javaslat: legyen $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ és alkamazza a második Green azonosságot.}

G. Feladat

1. Ellenőrizze a Gauss tételt a $\mathbf{v} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ vektorfüggvény esetére az R-sugarú gömb térfogaton. A gömb középpontja az origó.

2. Számolja ki a

   $$\mathbf{v} = r\cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} + r\sin(\theta)\hat{\theta} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\phi} \tag{11}$$

   vektormező divergenciáját. Ellenőrizze a divergenciatételt ha az adott térfogat egy R sugarú félgömb amely az x, y sík fölött helyezkedik el. (A teljes gömb középpontja az origóban van.)

3. Számolja ki a $T = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\phi))$ skalármező gradiensét és Laplace-függvényét. Ellenőrizze a gradienstételt ha az adott út a $(0, 0, 0)$ pontból induló $(2, 0, 0)$ pontban végződő egyenes, és a $(2, 0, 0)$ pontból induló $(0, 2, 0)$ pontban végződő körív majd a $(0, 2, 0)$ pontból induló $(0, 0, 2)$ pontban végződő körív egymásutánja.

4. Ellenőrizze a Gauss tétel érvényességét a következő függvényre,

   $$\mathbf{v} = r^2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + r^2\cos\phi\hat{\theta} - r^2\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}. \tag{12}$$

A térfogat legyen a következő: vegyen egy gömböt melynek a középpontja az origó. A térfogat legyen a gömb a koordináta rendszer pozitív nyolcadrészében lévő felülete, valamint az xy, yz és az xz tengelyek által közötti térfogat.

5. Ellenőrizze a Gauss tétel érvényességét a következő függvényre,

$$\mathbf{v} = r^2 \sin\theta \hat{\mathbf{r}} + 4r^2 \cos\theta \hat{\theta} + r^2 \tan\theta \hat{\phi}. \tag{13}$$

A térfogat legyen a következő: vegyen egy gömböt, melynek a középpontja az origó. Alkosson egy tölcsért a z-tengely körül, egy a z-tengellyel 30^o-os szöget bezáró vonal körbeforgatása által. A térfogat legyen a tölcsér és a gömb felületének felső ($z > r\cos 30^o$) része által közrefogott tartomány (egy egygombócos tölcséres fagylaltra hasonlít).

H. Feladat

1. Számolja ki a

$$\mathbf{v} = r(2 + \sin^2(\phi))\hat{\mathbf{r}} + r\sin(\phi)\cos(\phi)\hat{\phi} + 3z\hat{\mathbf{z}}, \tag{14}$$

vektorfüggvény divergenciáját. Ellenőrizze a Gauss tételt ha az adott térfogat egy $R = 2$ sugarú negyedhenger mely a pozitív x, y negyedben található, úgy, hogy a teljes henger tengelye az z tengely. A henger magassága 5, és a $z = 0$ $z = 5$ pontok között helyezkedik el.

GRADIENS-, DIVERGENCIA, ROTÁCIÓ FORMULÁK GÖMBKOORDINÁTA RENDSZERBEN

- Gradiens:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\phi}.$$

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}.$$

- Rotáció:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}.$$

GRADIENS-, DIVERGENCIA, ROTÁCIÓ FORMULÁK HENGERKOORDINÁTA RENDSZERBEN

- Gradiens:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}.$$

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

- Rotáció:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$