

Példák: Kvázistacionárius mezők

I. ELEKTROMÁGNESES SÍNÁGYÚ (RAILGUN) (A TÍPUSÚ)

Mekkora erő gyorsítja a 1. ábrán látható sínágyú lövedékét? A sínben I_0 áram folyik és szélessége w , az áramkör a lövedéken keresztül zárul, a mágneses mezőről feltesszük, hogy csak a sínek között és a lövedék mögött van és homogénnek közelítjük, az elrendezés mélysége D . Számolja ki az eredményt a virtuális munka elve alapján!

Plusz kérdés: a mágneses mező behatol a lövedékbe is és lecseng benne. Befolyásolja-e ez az eredményt?

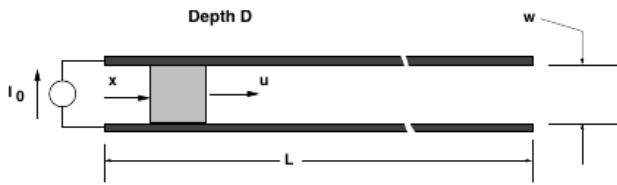


FIG. 1. Elektromágneses sínágyú (railgun)

II. KÉT KIS HUOK (A TÍPUSÚ)

Két kis hurok a 2. ábrán látható elrendezésben van.

- Határozza meg a kölcsönös indukciós együtthatót! (Segítség: tekintse mindkét hurkot kisméretű mágneses dipólusnak!)
- Tegyük fel, hogy az 1-es hurokban I_1 áram folyik, és a 2-es hurokba I_2 áramot szeretnénk vezetni. Mekkora munkát kell végeznünk a kölcsönösen indukált elektromotoros erő ellen, hogy az 1-es hurokban az I_1 áram folyhasson?

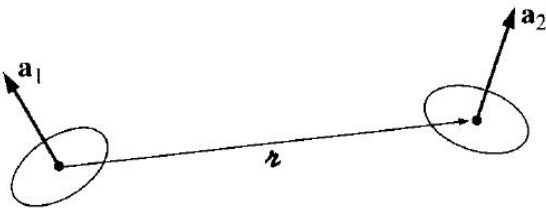


FIG. 2. Két kis hurok.

III. TOROIDTEKERCSBEN TÁROLT ENERGIA (A TÍPUSÚ)

Adott egy négyzet-alapú toroidtekerecs, amelynek a belső sugara a , a négyzet alap oldalhosszúsága b . A menetek száma N . Számolja ki a tekercsben tárolt energiát, ha I áram folyik benne!

(Segítség: használja az energia mágneses mezőn alapuló kifejezését!)

IV. ELEKTROMOS TÉR SZOLENOIDON BELÜL ÉS KÍVÜL (B TÍPUSÚ)

Adott egy hosszú a sugarú szolenoid, amelyben a tekercsek száma egységnyi hosszönként n . A szolenoidban $I(t)$ áram folyik a $\hat{\phi}$ irányban. Határozza meg az elektromos teret (nagyságát és irányát) a szolenoid tengelyétől r távolságra (kívül és belül), ha érvényes a kvázistacionárius közelítés!

V. ELEKTROMOS TÉR KOAXIÁLIS KÁBELEN BELÜL ÉS KÍVÜL (B TÍPUSÚ)

Egy végtelen hosszú huzalon $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ áram folyik. A huzalt egy a sugarú henger veszi körül amelynek a felületén $-I(t)$ áram folyik. Határozza meg az elektromos teret, ha feltételezzük, hogy a tér nullához tart az $r \rightarrow \infty$ limeszben!

VI. KÉT VOLTMÉTER (B TÍPUSÚ)

Egy hosszú szolenoidban az áram lineárisan nő az idő függvényében, így a fluxus t -vel arányos; $\Phi = \alpha t$. Két voltméter a szolenoid két oldalán van elhelyezve egy áramkörön belül, a 3. ábra szerint. Mit jelez a két voltméter? A voltméterek ideális voltméterek, azaz, elhanyagolható mennyiségű áramot vonnak el az áramkörből (azaz belső ellenállásuk hatalmas). Egy voltméter $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ mennyiséget mér két terminálpont között.

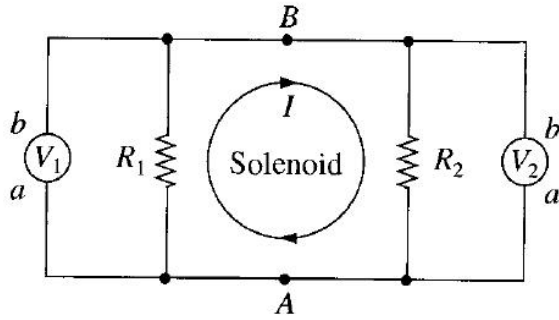


FIG. 3. Két ellenállás egy szolenoid körüli áramkörben.

További gyakorlásra

VII. ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

A. Elektromos tér vezető huzal közelében (A típusú)

Egy végtelen huzalban $I(t)$ áram folyik. Számolja ki az indukált elektromos tér nagyságát és irányát a huzaltól r távolságra!

B. Négyzethurok inhomogén változó térben (A típusú)

Egy a oldalhosszúságú négyzet alakú vezetőből készült hurok az xy sík pozitív negyedében helyezkedik el, úgy, hogy a négyzet egyik sarka az origóban van. A térben $\mathbf{B}(y, t) = ky^3t^2\hat{\mathbf{z}}$ mágneses tér van jelen (ahol k egy konstans). Számolja ki a hurokban indukált elektromotoros erőt!

C. Fémcsőben leejtett tárgyak (A típusú)

Ha egy függőleges fémcsőbe leejtünk egy henger alakú mágnes (a henger alakú mágnes sugara egy kicsit kevesebb mint a cső belső sugara), jóval lassabban esik le, mint ha egy ugyanolyan alakú és tömegű de nem mágnesezett testet ejtünk le. Magyarázza meg a különbséget!

D. Időtől függő mágneses tér (A típusú)

Ha egy térrészben $\mathbf{B}(t)$ mágneses tér van jelen (időtől függő, térben homogén), milyen irányú és nagyságú az indukált elektromos tér egy r sugarú körhurok mentén?

E. Elektromágneses sínágyú (railgun) (B típusú)

A I feladatban leírt sínágyú esetén számoljuk ki a gyorsító erőt a Lorentz-fél erőtvényből, a következő módon:

1. A lövedéken átfolyó áram profilját tekintjük homogénnek, azaz tételezzük fel egy állandó “ y ” irányú $\mathbf{J} = J_y\mathbf{e}_y$ áramsűrűséget! A mágneses térerősség ekkor “ z ” irányú és x -től függ, azaz $\mathbf{H} = H_z(x)\mathbf{e}_z$.
2. A rot $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ egyenletből számoljuk ki a mágneses térerősséget l hosszúságú lövedéket feltételezve, és kihasználva, hogy a lövedék előtt a mágneses mező zérus!
3. Számoljuk ki az erőt a

$$\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

formulával, a lövedék térfogatára integrálva!

4. Plusz kérdés: tegyük fel, hogy az áram eloszlás profilja x -től függ, azaz $\mathbf{J} = J_y(x)\mathbf{e}_y$. Befolyásolja-e ez az erőre kapott végeredményt?

F. Hurok ellenállással szolenoid körül (B típusú)

Egy hosszú a sugarú szolenoidot, amelynek menetsűrűsége n , körülvesz egy drót hurok, amelyben egy R ellenállás van (4. ábra).

1. Ha a szolenoidban az áram $I(t) = kt$, mekkor az áram az azt körülvevő hurokban? Milyen irányba folyik ez az áram?
2. Ha a szolenoidban folyó áram I állandó, és a szolenoidot kihúzzuk az áramhurokból, utána megfordítjuk, és vissza helyezzük, mekkora töltés megy át az ellenálláson?

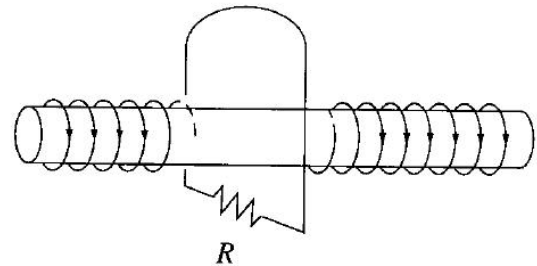


FIG. 4. Köráram szolenoid körül

G. Téglalap alapú toroidtekercs (B típusú)

Egy téglalap alapú toroidtekercs belső sugara a , a külső $a + w$, magassága h . A menetek teljes száma N . Az keringő áram $I = kt$. Határozza meg az elektromos teret a toroid középpontjától z távolságra ha $w, h \ll a$!

H. Két köráram (B típusú)

Két $a < b$ sugarú kör alakú hurok egymás fölött helyezkedik el (5. ábra). A körök síkjai párhuzamosak és középpontjaik közös tengelyen vannak.

1. Határozza meg a kis körben jelenlévő fluxust, ha a nagy körben I áram folyik! (A kis kört tekintsük olyan kicsinek, hogy a nagy kör által keltett mágneses tér állandónak tekinthető.)
2. Határozza meg a nagy körben jelenlévő fluxust, ha a kis körben I áram folyik! (A kis kör olyan kicsi, hogy tekinthetjük egy mágneses dipólusnak.)
3. Határozza meg a kölcsönös indukciós együtthatót, $M_{12} = M_{21}$ -et!

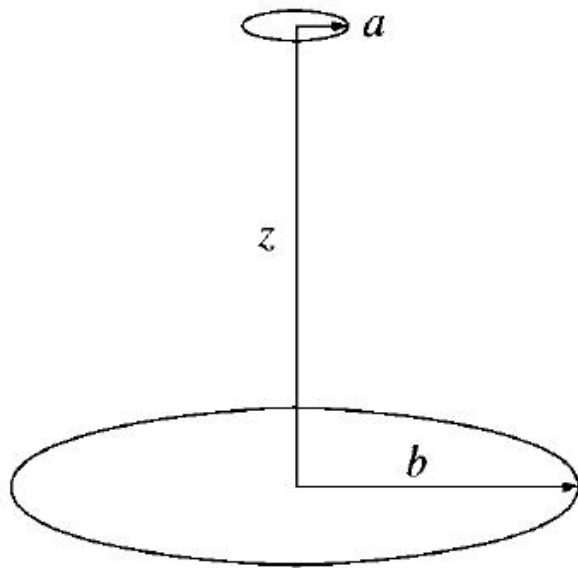


FIG. 5. Két köráram

I. Négyzet hurok egy téglalap hurkon belül (B típusú)

Egy négyzet alakú hurok, amelynek oldalhossza a , két egyenes párhuzamos huzal között helyezkedik el

félúton. A hosszú huzalok közötti távolság $3a$. A két hosszú huzal egy téglalap alakú áramkör része, amelynek $3a$ -ra merőleges oldala olyan hosszú, hogy tekinthető végtelennek. A négyzethurokban, az óra járásával megegyező irányban, $I = kt$ áram folyik. Mekkora elektromotoros erő indukálódik a téglalap alakú hurokban? Melyik irányba folyik az indukált áram?

J. Áram toroidtekercs tengelye mentén (B típusú)

Egy toroidtekercs tengelye mentén, egy huzalban, $I_0 \cos(\omega t)$ áram folyik. A toroidtekercs keresztmetszete téglalap alakú, a toroid belső sugara, a , a külső $a + w$, a tengelyirányú vastagsága h . A toroidtekercs ellenállása R .

1. Mekkora a toroidtekercsben indukált elektromotoros erő? Határozza meg az $I_R(t)$ áramot amely a toroidtekercsben folyik!
2. Határozza meg az $I_R(t)$ okozta elektromotoros erőt! Hogy aránylik ez az elektromotoros erő az első kérdésben kiszámolthoz?

K. Változó mágneses mező indukálta elektromos térerősség (B típusú)

1. A Faraday, Ampère és Biot-Savart törvények alapján mutassa meg, hogy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}', \quad (2)$$

adja meg a változó mágneses tér indukálta elektromos térerősséget!

2. Coulomb mértékben mutassa meg, hogy

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

ahol \mathbf{A} a vektor-potenciál!

3. Egy gömbalakú héj, melynek sugara R , homogén felületi töltést (σ) hordoz. A $\hat{\mathbf{z}}$ tengely körül forog $\omega(t)$, időtől függő szögsebességgel. A szögsebesség időben való változása olyan, hogy alkalmazható a kvázistacionárius közelítés. Számolja ki az elektromos teret a gömbön belül és kívül!

(Megjegyzés: Az elektromos térnek két járuléka van, a σ töltéssűrűségből, valamint az időben változó \mathbf{B} térből eredő.)

VIII. INDUKCIÓS EGYÜTTHATÓ, TRANSZFORMÁTOR

A. Szolenoid önindukciós együtthatója (A típusú)

Számolja ki egy hosszú, R sugarú, n menetsűrűségű szolenoid egységnyi hosszra eső önindukciós együtthatóját!

B. Hajtű önindukciós együtthatója (B típusú)

Számolja ki a 6. ábrán látható hajtű alakú huzal önindukciós együtthatóját! A végekből származó járuléktól tekintsen el! Tételezze fel, hogy a drót vastagsága véges (ϵ), és tekintsen el a drótban jelenlévő fluxustól!

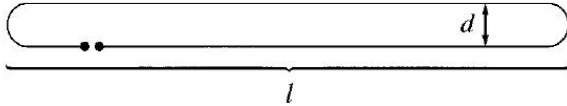


FIG. 6. Hajtű.

C. Koax-kábel önindukciós együtthatója (B típusú)

Egy hosszú kábelben I áram folyik egy irányban, úgy, hogy a keresztmetszet felületén az árameloszlás egyenletes. A kábel felületén ugyanakkora áram folyik mint a kábel belsejében, de az iránya arra ellentétes. (Egy nagyon vékony szigetelő réteg elválasztja a kábel belső részét a külső felületi résztől.) Határozza meg az elrendezés önindukciós együtthatóját!

D. Transzformátor (A típusú)

Két tekercs ugyanarra a testre van rátekerve, úgy, hogy a fluxus minden egyes menetben ugyanaz. (A gyakorlatban ezt úgy lehet elérni, hogy a henger helyén egy vasmagot alkalmazunk.) A primer tekercsnek N_1 menete van, a szekundernek N_2 (7. ábra). Ha az áram I nagysága a primer tekercsben időben változik, mutassa meg, hogy a szekunder tekercsben az \mathcal{E}_2 elektromotoros erő nagyságát az

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (4)$$

összefüggés adja meg, ahol \mathcal{E}_1 a primértekercsben a keringő áram által okozott elektromotoros erő! (Ez az elrendezés a **transzformátor** primitív változata.)

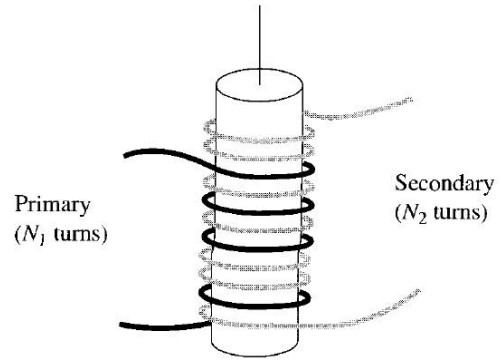


FIG. 7. Két tekercs egy henger alakú tárgyon.

IX. TRANSZFORMÁTOR (B TÍPUSÚ)

A transzformátor egy V_1 feszültségű váltóáramot V_2 feszültségű árammá alakítja át. Érvényes, hogy $V_2/V_1 = N_2/N_1$. Ha $N_2 > N_1$, akkor a kimenő feszültség nagyobb mint a bemenő. Miért nem mond ez ellen az energiamegmaradás törvényének? *Válasz:* A teljesítmény az áram és a feszültség szorzata; így ha a feszültség növekszik az áramnak csökkennie kell. E feladat célja ezen elvek működését egy egyszerű model alapján belátni.

1. Egy ideális transzformátorban a primer és szekunder tekercsek meneteiben ugyanazon fluxus halad át. Mutassa meg, hogy ebben az esetben $M^2 = L_1 L_2$, ahol M a tekercsek kölcsönös indukciós együtthatója, L_1 és L_2 pedig a két tekercs önindukciós együtthatója!
2. Az primer tekercsbe $V_{in} = V_2 \cos(\omega t)$ áramot vezetünk, a szekunder tekercset egy R ellenálláshoz kötjük. Mutassa meg a következő összefüggéseket

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} &= V_1 \cos(\omega t), \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} &= -I_2 R. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Az első feladatrészt eredménye alapján oldja meg ezeket az egyenleteket $I_1(t)$ -re és $I_2(t)$ -re! (Tételezze fel, hogy I_1 -nek nincs egyenáramú komponense!)
4. Mutassa meg, hogy a kimeneti feszültség ($V_k = I_2 R$) osztva a bemeneti feszültséggel (V_b) egyenlő a menetek számainak arányával, azaz $V_k/V_b = N_2/N_1$.
5. Számolja ki a bemeneti teljesítményt ($P_b = V_b I_1$) és a kimeneti teljesítményt ($P_k = V_k I_2$), és mutassa meg, hogy egy teljes cikluson számolt átlaguk egyenlő!

X. MÁGNESES MEZŐ ENERGIÁJA

A. Koax kábel energiája (A típusú)

Adott egy hosszú koax kábel, amelynek belső sugara a , a külső b . Az a sugarú kábelben I áram folyik, a b sugarúban is, de az a sugarúval ellentétes irányban. Határozza meg az egységnyi hosszra jutó mágneses energiát!

B. Szolenoidban tárolt energia (A típusú)

Határozza meg egy R sugarú, n menetsűrűségű szolenoidban l hosszúságú részében tárolt energiát, ha I áram folyik benne, a következő módokon!

1. Számolja ki az önindukciós együtthatót, és az alapján!
2. Számolja ki a mágneses tereket, és használja az energia kifejezést!
3. Számolja ki a vektorpotenciált, és használja az energia kifejezést!

C. Mágneses kapcsoló (A típusú)

Mekkora erő húzza a kart a 8. ábrán látható mágneses kapcsolóban? A tekercs menetszáma N és benne I áram folyik, a vasmag releváns szélessége w , a légrés g és az ábra síkjára merőleges vastagsága D . A vasmagot és a kart is tökéletes mágnesként modellezzük ($\mu \rightarrow \infty$).

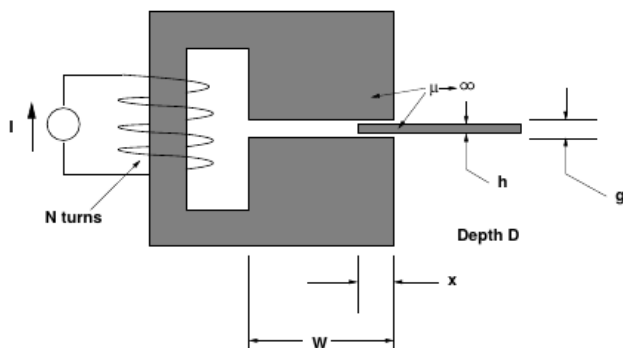


FIG. 8. Mágneses kapcsoló

D. Toroid tekercs légrésében ébredő erő (B típusú)

Adott egy körkeresztmetszetű toroid tekercs, amelynek a menetszáma N és benne I áram folyik. A toroid középvonalának a sugara R_0 és a keresztmetszete A_0 . A toroid vasmagjának a relatív mágneses permeabilitása $\mu_r \gg 1$. A vasmagban (keresztirányban) egy igen keskeny δ széles légrés van.

1. Határozza meg a toroid L önindukciós tényezőjét és a benne tárolódó W_m mágneses energiát!

2. A W_m ismeretében határozza meg a légrés méretét változtatni akaró F_m erőt! Tágítja, vagy összehúzza ez az erő a légrést?

3. Számolja ki az F_m erőt a következő adatokkal: $\mu_r = 1000$, $R_0 = 10$ cm, $A_0 = 4$ cm², $\delta = 1$ mm, $I = 5$ A és $N = 1000$!