FIGYELEM! MINDEN FELADATOT NÉVVEL ÉS NEPTUN KÓDDAL ELLÁTOTT KÜLÖN LAPON KELL BEADNI! EZT A FELADATLAPOT IS BE KELL ADNI! ERRE A FELADATLAPRA TILOS ÍRNI!	**2021/2022** **Elektrodinamika gyakorlat 1.** **NZH 2** **NEPTUN KÓD:** .... **NÉV:** .... **ÖSSZPONTSZÁM:** ....

1. Feladat (30 pont) Adott egy R sugarú henger melyben a mágneses indukcióvektor

$$\mathbf{B} = B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

míg azon kívül

$$\mathbf{B} = B_0 e^{-r/R}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

(a) Rajzolja fel a z tengelytől mért r távolság függvényényben a mágneses tér $\hat{\mathbf{z}}$ és $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ komponensét! (**4 pont**)

(b) Adja meg a vektorpotenciált a hengeren belül és kívül! (**5 pont**)

(c) Kielégíti-e a Coulomb-mérték feltételét a vektorpotenciál? Ha nem hajtson végre egy mérték transzformációt, amely a vektorpotenciált Coulomb-métrékbe transzformálja! (**4 pont**)

(d) Rajzolja fel a z tengelytől mért r távolság függvényében a vektorpotenciál nem nulla komponenseit! (**4 pont**)

(e) Adja meg a rendszerben az áramsűrűség vektort, figyeljen a felületre is! (**7 pont**)

(f) Adja meg a z irányba folyó teljes áramot! (**6 pont**)

Megoldás:

(a) Rajz!

(b) A hengeren belül a rotáció képletetÉ alkalmazva

$$\frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi) = B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) \Rightarrow \mathbf{A}_b = \frac{R^2 B_0}{\pi^2 r}\left(\frac{r\pi}{R}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) + \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

hasonló módon kívül:

$$-\partial_r A_z = B_0 e^{-r/R} \Rightarrow \mathbf{A}_k = \left(B_0 R\left(e^{-r/R} - 1\right) + \frac{B_0 R}{\pi}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{2}$$

(c) Belül egy $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\mathbf{j}_b = j_b(r)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ irányú térfogati áramsűrűség kelti a mágneses teret, amely egy a henger tengelyétől r távolságra lévő, z irányban végtelen vonal mentén véve az Ampere törvényt a következő adja

$$LB = \mu_0 \int_r^R \mathrm{d}r j(r) \Rightarrow j_b(r) = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\pi}{R}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \tag{3}$$

Kívül a záram $\mathbf{j}_k = j_k(r)\hat{\mathbf{z}}$ irányú, Ekkor a mágneses teret az Ampere törvény segítségével, azon belül egy $r > R$ sugarú körre integrálva tudjuk megadni:

$$\frac{rB_\varphi}{\mu_0} = \int_R^r \mathrm{d}r'\, r' j(r') = \frac{B_0 r}{\mu_0}e^{-r/R} \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{B_0}{\mu_0 r}e^{-r/R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{4}$$

Ne feledkezzünk meg a felületi áramokról sem! Mivel a mágneses tér z komponensének ugrása a felületen $B_{z,1} - B_{z,2} = B_0 \to \mathbf{K}_1 = \mu_0 B_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Azonban a mágneses tér $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ komponense ugrik afelületen, $B_{\varphi,2} - B_{\varphi,1} = B_0 e^{-1} \Rightarrow \mathbf{K}_2 = \mu_0 B_0 e^{-1} \hat{\mathbf{z}}$.

(d) A teljes áram egyszerűen csak a mágneses tér által megadható

$$I = \frac{B_0}{\mu_0} 2\pi r e^{-r/R} \Rightarrow 0 \tag{5}$$

---

2. Feladat (20 pont)

Adott az $x = a$ pontban egy z irányban végtelen hosszú, egyenes vezető, melyben I áram folyik. Ezen felül adott az origóban egy mágneses dipólus, $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{y}}$ dipólmomentummal.

(a) Adja meg a dipólus vektorpotenciálját mindenhol a térben! (**4 pont**)

(b) Felyezze ki a mágneses indukció fluxusát a vektorpotenciál segítésével! (**2 pont**)

(c) Adja meg a dipólus által keltett fluxust a vezető által határolt térületre, vagyis az áram által határolt félsíkra az $y = 0$ síkban! (*Segítség:* Használja az előbb levezetett formulát és számoljon a vektorpotenciállal!) (**4 pont**)

(d) Adja meg a kölcsönös indukciós együtthatót! (**2 pont**)

(e) Határozza meg az egyenes vezető által keltett fluxust a dipólusban, a dipólusra tekintsen úgy, mint egy I árammal ájárt $r_0 \ll 1$ sugarú köráramra. Majd adja meg a kölcsönös indukciós tényezőt! (**4 pont**)

(f) Határozza meg, mekkora erő hat a vezető és a dipólus között. A kapott erőt fejezze ki a dipólus nagyságával! (**4 pont**)

Megoldás:

Ugyanaz a helyzet, mintha a dipólus a z irányba mutatna, az áram pedig a $-y$ irányba folyna, ekkor a vektorpotenciálbeli keresztszorzatra csak az x, y síkon van szükségünk:

(a) A vektorpotenciál definíció szerint:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{6}$$

(b) Az integrál az egyenes vezető mentén:

$$-\frac{m\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{m\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tag{7}$$

mivel $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}$. A fenti integrál a segítségnek megfelelően:

$$\Phi_{mz} = -\frac{m\mu_0}{2\pi a} \tag{8}$$

A megadott koordináta rendszerben kiszámolva a vektorpotenciált és a fluxust:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (z\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{z}}) \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{m\mu_0}{2\pi a} \tag{9}$$

Ahonnan a vonalintegrál az egyenes vezetőre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, \hat{\mathbf{z}} \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \tag{10}$$

(c) Innen a kölcsönös indukciós együttható, ha $\mathbf{m} = I\pi r_0^2\hat{\mathbf{z}}$

$$L_{mz} = -\frac{\mu_0 r_0^2}{2a} \tag{11}$$

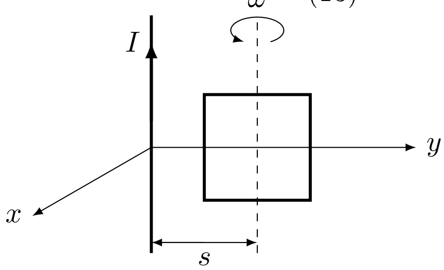
(d) Az egyenes vezető tere $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, ami a nagyon kicsi r_0 miatt egyszerűen csak

$$\Phi_{zm} = \frac{\mu_0 r_0^2 I}{2a} \Rightarrow L_{mz} = \frac{\mu_0 r_0^2}{2a} \tag{12}$$

vagyis várakozásunknak megfelelően ugyanaz, mint az előző esetben.

(e) Az erő általános kifejezése alapján, ahola deriválás után vennünk kell az $r = a$ és a $\varphi = \pi/2$ értékeket:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}) = \nabla\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\mathbf{y}}m\right) = \frac{\mu_0 Im}{2\pi}\nabla\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \frac{\mu_0 Im}{2\pi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\cos\varphi}{r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \\ &\Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{\mu_0 Im}{2\pi a^2}\hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{13}$$



3. Feladat (30 pont)

Adott egy végtelen hosszú vezető, amiben I áram folyik, valamint egy a oldalú R ellenállú négyzet alakú vezető hurok, aminek a türöktengelye a vezetőtől s távolságra van. A hurkot a $t = 0$ időpillanatban állandó ω szögsebességgel elkezdjük az előbbi türtengely körül forgatni. A vezető z irányú, a hurok pedig kezdetben az yz síkban helyezkedik el.

(a) Adja meg a mágneses indukcióvektort mindenhol a térben! (**2 pont**)

(b) Adja meg a keretnek a forgástengelytől x távolságra lévő pontjának a távolságát a vezetőtől egy $t > 0$ időpillanatban! (**5 pont**)

(c) Adott $t > 0$ időpillanatban adja meg a keret, egy a vezetővel párhuzamos a hosszú és dx széles felületdarabjának infinitezimális fluxusát. (**6 pont**)

(d) Adja meg a teljes fluxust az idő függvényében (*Segítség:* Alakítsa teljes négyzetté az integrandus nevezőjét!)! (**8 pont**)

(e) Mekkora az indukált elektromotoros erő a $t > 0$ időpillanatban? (**6 pont**)

(f) Adja meg a kereten átfolyó töltés nagyságát miközben a keret megtesz $N = 1000$ fordulatot! **(3 pont)**

Megoldás:

(a) A mágneses tér egyenes vezető esetén:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{14}$$

(b) A távolságot a koszinusz tétel segítségével tudjuk megadni, ekkor a kérdéses háromszög, aminek három pontja a keret középpontja, a vezető és az adott, a keret közepétől x távolságra lévő pont, egyik oldala x, a másik $s + a/2$, míg a közbe zárt szög pedig $\varphi = \omega t$:

$$r = \sqrt{(s + a/2)^2 + x^2 - 2x(s + a/2)\cos\varphi} \tag{15}$$

(c) Ennél a távolságnál a mágneses tér nagysága

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(s + a/2)^2 + x^2 - 2x(s + a/2)\cos\varphi}} \tag{16}$$

Ekkor tekintenünk kell még a mágneses tér merőleges vetületét a keretre, ekkor ha a mágneses tér és a keret által bezért θ, akkor a merőleges vetülethez $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$-val kell beszoroznunk a mágnese tér nagyságát, ami azonban azonban kifejezhető a zelőző feladatbeli háromszögben az $s + a/2$ oldalra felírható koszinusz tétel segítségével:

$$\sin(\theta) = \frac{(s + a/2)^2 - x^2 - r^2}{2xr} = \frac{(s + a/2)\cos(\varphi) - x}{r} \tag{17}$$

ahonnan az ininitezimális fluxus:

$$\mathrm{d}\Phi_B = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\frac{(s + a/2)\cos(\varphi) - x}{(x - (s + a/2)\cos(\varphi))^2 + (s + a/2)^2\sin^2(\varphi)} \tag{18}$$

(d) Teljes fluxushoz a fenti kifejezést kell integrálnunk $-a/2$-től $a/2$-ig:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\int_{(s+a/2)\cos(\varphi)+a/2}^{(s+a/2)\cos(\varphi)-a/2}\mathrm{d}x\frac{x}{x^2 + (s + a/2)^2\sin^2(\varphi)}\\ &= \frac{a\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{((s + a/2)\cos(\varphi) - a/2)^2 + (s + a/2)^2\sin^2(\varphi)}{((s + a/2)\cos(\varphi) + a/2)^2 + (s + a/2)^2\sin^2(\varphi)}\right)\\ &= \frac{a\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{(s + a/2)^2 + a^2/4 - a(s + a/2)\cos(\varphi)}{(s + a/2)^2 + a^2/4 + a(s + a/2)\cos(\varphi)}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

(e) Az elektromotoros erőhöz a fenti kifejezést deriváltját kell tekintenünk, ahol $\varphi = \omega t$

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_B = &-\frac{\omega a\mu_0 I}{2\pi}(s + a/2)\sin(\varphi)\\ &\times\left(\frac{1}{(s + a/2)^2 + a^2/4 - a(s + a/2)\cos(\varphi)} + \frac{1}{(s + a/2)^2 + a^2/4 + a(s + a/2)\cos(\varphi)}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

(f) Az átáramló töltés egyszerűen a fluxus alakja nélkül

$$\Delta Q = (\Phi_B(0)\Phi_B(NT))/R = 0 \tag{21}$$

mivel a kere éppen visszafordul a kezdeti állapotába és így ugyanakkora két fluxus!

---

4. Feladat (20 pont) Adott egy időben változó, hengerszimmetrikus mágneses tér. A **B** mágneses indukció z irányú és nagysága csak a z tengelytől mért r távolságtól függ, a következőképpen:

$$B_z = \begin{cases} B_0\dfrac{r^2 t}{a^2 T} & 0 \le r \le a \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

(a) Határozza meg azt az elektrom teret, ami a felső mágneses indukciót indukálja! (**5 pont**)

(b) Eltekintve a további indukciós jelenségektől adja meg az elektromágneses energiasűrűséget! (**3 pont**)

(c) Adja meg egy L hosszúságú a sugarú szakasz elektromágneses energiáját! (**4 pont**)

(d) Eltekintve a további indukciós jelenségektől adja meg a Poynting-vektort! (**3 pont**)

(e) Határozza meg az a sugarú L hosszú hengerpaláston átfolyó energiát. (**3 pont**)

(f) Vizsgálja, hogy a paláston átfolyó energia milyen kapcsolatban van a paláston belüli energiával! (**2 pont**)
