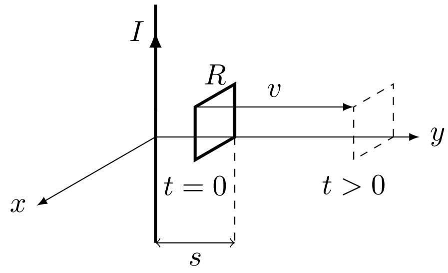
FIGYELEM! MINDEN FELADATOT NÉVVEL ÉS NEPTUN KÓD-DAL ELLÁTOTT KÜLÖN LAPON KELL BEADNI! EZT A FELADATLAPOT IS BE KELL ADNI ! ERRE A FELADATLAPRA TILOS ÍRNI !	**2021/2022** **Elektrodinamika gyakorlat 1.** **NZH 2** **NEPTUN KÓD:** .... **NÉV:** .... **ÖSSZPONTSZÁM:** ....

1. Feladat (30 pont)



Adott egy végtelen hosszú vezető, amiben I áram folyik. A vezetőtől kezdetben s távolságra egy a oldalú négyzet alakú vezető hurok található R ellenállással, ahogy az ábrán látható. A hurkot a $t = 0$ időpillanatban állandó v sebességgel elkezdjük a vezetőre merőlegesen, attól elfele mozgatni. A vezető egybeesik a z tengellyel, illetve a keret legyen párhuzamos az xz síkkal!

(a) Adja meg a mágneses indukcióvektort mindenhol a térben! (**3 pont**)

(b) Adja meg a keret egy adott, x-nél lévő pontjának távolságát a vezetőtől $t > 0$ időpillanatban. (**4 pont**)

(c) Adja meg egy dx szélességű, a magasságú felületdarab infinitezimális fluxusát a $t > 0$ időben. (**5 pont**)

(d) Adja meg a teljes fluxust az idő függvényében! (**6 pont**)

(e) Mekkora az indukált elektromotoros erő a $t > 0$ időpillanatban? (**5 pont**)

(f) Adja meg, hogy mennyi töltés áramlik át a kereten míg azt a végtelenbe elvisszük! **(7 pont)**

Megoldás:

(a) Egyenes vezető esetén r távolságra a mágneses indukció vektor, ahol a vezetőt az általánosság megcsorbítása nélkül párhuzamosnak vettük a $\hat{\mathbf{z}}$ tengellyel:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

(b) A keret távolsága a vezetőtől $s + vt$, míg az x-nél lévő pont távolsága egyszerűen:

$$r = \sqrt{(s + vt)^2 + x^2} \tag{2}$$

(c) A mágneses tér nagysága ekkor $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+(s+vt)^2}}$. Illetve ekkor a keretre merőlges komponense

$$B_\perp = \frac{\mu_0 I x}{2\pi\left(x^2 + (s + vt)^2\right)} \tag{3}$$

Ahonnan az infinitezimális fluxus

$$\mathrm{d}\Phi_B = \frac{\mu_0 Ixa}{2\pi\left(y^2 + (s+vt)^2\right)}\mathrm{d}x \tag{4}$$

(d) Kiintegrálva fenit kifejezést:

$$\Phi_B = \int_0^a \frac{\mu_0 Iya}{2\pi\left(x^2 + (s+vt)^2\right)}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\ln\left(\sqrt{a^2 + (s+vt)^2}\right) - \ln(s+vt)\right) \tag{5}$$

(e) Az átáramló töltéshez először ki kell számítanunk az elektromotoros erőt, amiből megadható az áram

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\dot{\Phi}_B}{R} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R}\left(\frac{1}{s+vt} - \frac{s+vt}{a^2 + (s+vt)^2}\right) = \frac{\mu_0 Ia^3}{2\pi R}\frac{1}{(s+vt)\left(a^2 + (s+vt)^2\right)} \tag{6}$$

Ahonnan az átáramló töltés:

$$\Delta Q = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R}\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\frac{1}{s+vt} - \frac{s+vt}{a^2 + (s+vt)^2}\right) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi Rv}\left(\ln\left(\sqrt{s^2+a^2}\right) - \ln s\right) \tag{7}$$

Egyszerűbb megfontolás alapján pedig:

$$\Delta Q = -\frac{1}{R}\int_0^\infty \mathrm{d}t\dot{\Phi}_B(t) = \frac{\Phi_B(0)}{R} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi Rv}\left(\ln\left(\sqrt{s^2+a^2}\right) - \ln s\right) \tag{8}$$

---

2. Feladat (20 pont) Adott egy R sugarú henger melyben a mágneses vektorpotenciál

$$\mathbf{A} = -\mu_0 kr\hat{\mathbf{z}},$$

míg azon kívül

$$\mathbf{A} = -\mu_0 kR(2\ln(r/R) + 1)\,\hat{\mathbf{z}}$$

(a) Rajzolja fel mindenhol a térben a vektorpotenciál z komponensét! (**3 pont**)

(b) Felhasználva, hogy $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$, adja meg a mágneses teret a vezetőn belül! (**6 pont**)

(c) Hasonló módon adja meg a mágneses teret a vezetőn kívül! (**4 pont**)

(d) Rajzolja fel mindenhol a térben a mágneses tér nem nulla komponensét! (**3 pont**)

(e) Adja meg a rendszer áramelrendezését! (**4 pont**)

Segítség:
Rotáció henger koordinátarendszerben:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi\right)\hat{\mathbf{r}} + (\partial_z A_r - \partial_r A_z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r}(\partial_r(rA_\varphi) - \partial_\varphi A_r)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{9}$$

Megoldás:

1. Rajz!

2. A segítség alapján a rotáció

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -\partial_r A_z(r)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mu_0 k\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{10}$$

3. Hasonlóan

$$\mathbf{B} = \partial_r\Big(2\mu_0 kR\ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{2\mu_0 kR}{r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{11}$$

4. Rajz!

5. Az áramot legegyszerűbben **B**-nak rotációjából számolhatjuk:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{r}\partial_r(rB)\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 k}{r}\hat{\mathbf{z}},\ \text{ha } r < R \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{r}\partial_r(rB)\,\hat{\mathbf{z}} = 0 \tag{13}$$

ahonnan a térfogati áramsűrűség

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{k}{r}\hat{\mathbf{z}},\ \text{ha } r < R \\ 0,\ r > R \end{cases} \tag{14}$$

Illetve a mágneses tér tangenciális komponensének ugrásából látható, hogy a henger felületén van még egy $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{z}}$ felületi áramsűrűség.

---

3. Feladat (30 pont)

Adott egy z irányban végtelen hosszú, R sugarú henger, amelyen belül a mágnesezettség:

$$\mathbf{M} = M_0\exp(-\lambda r/R)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

a hengeren kívül a mágnesezettség zérus.

(a) Rajzolja fel mágnesezettséget mindenhol a térben! (**4 pont**)

(b) Határozza meg a mágnesezettségből a kötött áramsűrűséget mindenhol a térben! Vannak-e jelen felületi áramok? (**7 pont**)

(c) Határozza meg a hengeren átfolyó kötött áram nagyságát! (**6 pont**)

(d) Adja meg az Ampére törvény segítségével a mágneses indukcióvektort a vezetőn belül! (**8 pont**)

(e) Adja meg a mágneses indukcióvektort a vezetőn kívül! (**5 pont**)

Segítség:

$$\int_0^R \mathrm{d}r\,\exp(-r) = 1 - \exp(-R)$$

$$\int_0^R \mathrm{d}r\,r\exp(-r) = 1 - (R+1)\exp(-R)$$

Megoldás:

(a) Rajz!

(b) Alkalmazva a $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{j}_{\mathrm{pol}}$ képletet:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = M_0 \frac{1}{r}\partial_r (r \exp(-\lambda r/R))\,\hat{\mathbf{z}} = M_0\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{R}\right)\exp(-\lambda r/R)\,\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{j}_{\mathrm{pol}} = M_0\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{R}\right)\exp(-\lambda r/R)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{15}$$

Mivel $\mathbf{M}$ tangenciális komponensének ugrása van a peremen, $\Delta M = M_0 e^{-\lambda}$, jelen van egy $\mathbf{K} = M_0\,\hat{\mathbf{z}}$ felületi áramsűrűség is.

(c) Az átfolyó áram nagysága egyrészt a térfogati áramsűrűség keresztmetszetre vett felületi integrálja, illetve a peremen haladó felületi áramsűrűség kerületre vett integrálja:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi M_0 \int_0^R \mathrm{d}r\, r\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{R}\right)\exp(-\lambda r/R) + 2\pi R M_0 e^{-\lambda} \\ &= 2\pi M_0\left(\int_0^R \mathrm{d}r\left(1 + \frac{r\lambda}{R}\right)\exp(-\lambda r/R) + 1\right) = 2\pi M_0 \frac{R}{\lambda}((\lambda+1)\exp(-\lambda) - 1 - \exp(-\lambda) + 1) \\ &+ 2\pi R M_0 e^{-\lambda} = 4\pi R M_0 e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{16}$$

(d) Ampere törvény segítségével egyszerűen megadható a mágneses tér a hengeren belül

$$\begin{aligned} &\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B} = 2\pi r B = 2\pi\mu_0 M_0 \int_0^r \mathrm{d}r'\left(1 - \frac{r'\lambda}{R}\right)\exp\left(-\lambda r'/R\right) \\ &= 2\pi\mu_0 M_0 \frac{R}{\lambda}\left(\left(\frac{\lambda r}{R} + 1\right)\exp\left(-\frac{\lambda r}{R}\right) - 1 - \exp\left(-\frac{\lambda r}{R}\right) + 1\right) = 2\pi\mu_0 M_0 r \exp\left(-\frac{\lambda r}{R}\right) \\ &\Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 M_0 \exp\left(-\frac{\lambda r}{R}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \equiv \mu_0 \mathbf{M} \end{aligned} \tag{17}$$

A hengeren kívül pedig egyszerűen az Ampere törvényből:

$$2\pi r B = \mu_0 I = \mu_0 4\pi R M_0 e^{-\lambda} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{2\mu_0 M_0 R e^{-\lambda}}{r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{18}$$

(e) Rajz!

---

4. Feladat (20 pont) Adott +1. ábrán mutatott elrendezés, egy a sugarú hengeres huzal, amelyben I áram folyik, és egy $w \ll a$ vastagságú légrés van. Ez az elrendezés egy olyan síkkondenzátornak fogható fel, amely éppen töltődik.

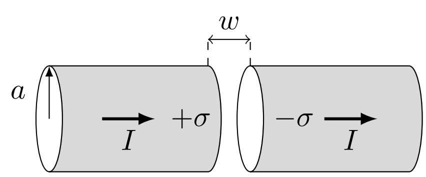


Figure 1:

(a) Határozza meg az elektromos és mágneses tereket a légrésben, a tengelytől való távolság r és az idő t függvényében, ha $t = 0$ időben a töltés nulla! (**8 pont**)

(b) Határozza meg az u energiasűrűséget és az $\mathbf{S}$ Poynting-vektort a légrésben! Milyen irányba mutat a Poynting vektor? Ellenőrizze, hogy (**6 pont**)

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathrm{em}} = -\nabla \cdot \mathbf{S}.$$

(c) Határozza meg a résben jelenlévő energiát az idő függvényében! Számolja ki a résbe beáramló teljesítményt a Poynting-vektor megfelelő felületre való kiintegrálásával! (**4 pont**)

(d) Ellenőrizze, hogy a beáramló teljesítmény megegyezik az energia idő szerinti deriváltjával! (**2 pont**)

Megoldás:

(a) Az elektromos tér $\mathrm{D} = \frac{It}{a^2\pi}\hat{\mathbf{z}}$, ahonnan az eltolási áram $\mathbf{j}_d = \frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}}$. Emiből megadható a mágneses tér az Ampere törvény segítségével r távolságra a középponttól:

$$2\pi r B = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{19}$$

(b) A Poynting vektor definíció szerint

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{I^2 t r}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \tag{20}$$

Az energia sűrűség, illetve annak idősderiváltja ekkor:

$$u_{\mathrm{em}} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} + \frac{I^2 t^2}{2a^4\pi^2\varepsilon_0} \tag{21}$$

$$\partial_t u_{\mathrm{em}} = \frac{I^2 t}{a^4\pi^2\varepsilon_0} \tag{22}$$

Illtve a Poynting vektor divergenciája:

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{r}\partial_r(rS) = \frac{I^2 t}{2r\pi^2 a^4\varepsilon_0}\partial_r\left(r^2\right) = \frac{I^2 t}{a^4\pi^2\varepsilon_0}. \tag{23}$$

Igazolva ezzel az állítást!

(c) A résben lévő energia egyszerűen csak u_{em}-nak a téfogatra vett integrálja:

$$E(t) = 2\pi w \int_0^a \mathrm{d}r\, r\left(\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} + \frac{I^2 t^2}{2a^4\pi^2\varepsilon_0}\right) = \frac{w\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{wI^2t^2}{2a^2\pi\varepsilon_0} \tag{24}$$

A befolyó energiaáramot a Poyynting vektor zárt felületi integráljával tudjuk megadni:

$$-\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{S} = w\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, a\frac{I^2 t}{2\pi^2 a^3\varepsilon_0} = \frac{wI^2 t}{\pi a^2\varepsilon_0} \tag{25}$$

(d) Látható, hogy $\partial_t E(t) = \frac{wI^2 t}{\pi a^2 \varepsilon_0}$, ami éppen megegyezik a fentebbi felületi integrál értékével!