FIGYELEM! MINDEN FELADATOT NÉVVEL ÉS NEPTUN KÓDDAL ELLÁTOTT KÜLÖN LAPON KELL BEADNI! EZT A FELADATLAPOT IS BE KELL ADNI !	**2021/2022** **Elektrodinamika gyakorlat 1.** **PÓT NZH 1, 2021. november 23.** **NEPTUN KÓD:** .... **NÉV:** .... **ÖSSZPONTSZÁM:** ....

1. Feladat (30 pont)

Adott két, végtelen hosszú koncentrikus hengerfelület. A hengerek forgástengelye a z koordinátatengely és a sugaruk $R_2 > R_1$. A belső hengerfelületen belül lineárisan növekvő $\rho_1 = \rho_0 r/R_1$ pozitív térfogati töltéssűrűség van. A külső hengerfelületen egyenletes $-\sigma_2$ negatív felületi töltéssűrűség helyezkedik el. A töltéselrendezés hosszegységre eső össztöltése zérus.

(a) Határozza meg a ρ_1 térfogati töltéssűrűség által keltett $E_1(r)$ térerősséget mindenhol a térben a Gauss-törvény segítségével! (4 pont)

(b) A térerősség ismeretében határozza meg a $\Phi_1(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! (4 pont)

(c) Rajzolja fel a kapott $E_1(r)$ és $\Phi_1(r)$ függvényeket! (3 pont)

(d) Határozza meg a $-\sigma_2$ felületi töltéssűrűség által keltett $E_2(r)$ térerősséget mindenhol a térben a Gauss-törvény segítségével! (4 pont)

(e) A térerősség ismeretében határozza meg a $\Phi_2(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! (4 pont)

(f) Rajzolja fel a kapott $E_2(r)$ és $\Phi_2(r)$ függvényeket! (3 pont)

(g) Rajzolja fel a teljes térerősséget és a teljes potenciált! (2 pont)

(h) A kapott eredmények alapján határozza meg a töltésrendszer hosszegységre eső W összenergiáját! (6 pont)

Megoldás:

(a) Alkalmazzuk a Gauss törvényt egy tetszőleges L hosszúságú szakaszra és egy tetszőleges $r < R_1$ sugarú hengerfelületre, ahol szimmetriai megfontolásokból tudjuk, hogy $\mathbf{E}$-nek csak radiális komponense van:

$$\int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E} = 2\pi r L E = L2\pi \int_0^r \mathrm{d}r'\, r' \frac{\rho r'}{R_1\varepsilon_0} = \frac{2L\pi r^3\rho}{3R_1\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho r^2}{3R_1\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \qquad (1)$$

(b) Ekkor a potenciál egyszerűen visszaszámolható az $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ alapján:

$$E = -\partial_r \Phi \Rightarrow \Phi = -\frac{\rho r^3}{9R_1\varepsilon_0} \tag{2}$$

Ha $R_2 > r > R_1$ esetén egyszerűen a belső henger össztöltésével kell számolnunk:

$$\int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E} = L2\pi r E = \frac{QL}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0},\ Q = 2\pi\int_0^{R_1} \mathrm{d}r\, r\frac{\rho r}{R_1} = \frac{2\pi\rho R_1^2}{3} \Rightarrow E = \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0 r} \tag{3}$$

$$E = -\partial_r \Phi \Rightarrow \Phi = -\frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln(r/r_0) \tag{4}$$

ahol r_0 úgy van megválasztva, hogy a potenciál foyltonos legyen R_1-ben:

$$\frac{\rho R_1^2}{9\varepsilon_0} = \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln(R_1/r_0) \Rightarrow r_0 = R_1 e^{-1/3} \Rightarrow \Phi = -\frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln\Big(re^{1/3}/R_1\Big) \tag{5}$$

(c) Rajz!

(d) Ha $r > R_2$, akkor mivel összességében nulla tötés tartozkódik a körbezárt térfogatban, $\mathbf{E} = 0$, illetve ekkor $\Phi = -\frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln\big(R_2 e^{1/3}/R_1\big)$

(e) Rajz!

(f) Rajz!

(g) Az energia kiszámíításához legegyszerűbb az

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho\Phi \tag{6}$$

összefüggést alkalmazni, ahol is integrálnunk kell az R_1 sugarú henger belsejére, illetve utána az R_2-nél felvett kosntans értékét kell kiintegrálnunk az R_2 sugarú henger felületén konstans $-\sigma_2$ felületi töltéssűrűség mellett, toábbá az energiát csak hosszegységengént afódjuk meg a beglső hengerben lévő hosszegységnyi Q töltéssel kifejezve:

$$W = -2\pi\int_0^{R_1} dr\, r^2\frac{\rho r}{R_1}\frac{\rho r^3}{9R_1\varepsilon_0} + 2\pi R_2\sigma_2\frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln\Big(R_2e^{1/3}/R_1\Big) = -\frac{2\pi\rho^2R_1^5}{63\varepsilon_0} + Q\frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ln\Big(R_2e^{1/3}/R_1\Big)$$
$$= \frac{Q\rho R_1^2}{21\varepsilon_0}\Big(7\ln\Big(R_2e^{1/3}/R_1\Big) - 1\Big)$$

---

2. Feladat (20 pont)

Adott egy a sugarú gyűrű a $z = 0$ síkban. A gyűrűn $\lambda(\phi) = \lambda_0\sin(2\phi)$ lineáris töltéselos-zlást rögzítünk.

(a) Számolja ki a gyűrű össztöltését! (3 pont)

(b) Számolja ki a gyűrű dipól momentumát! (4 pont)

(c) Számolja ki a gyűrű kvadrupól momentum mátrixát! (8 pont)

(d) Adja meg a gyűrű potenciáljának közelítő értékét a gyűrűtől nagy távolságra ($r \gg a$) kvadrupól rendig! (5 pont)

Megoldás:
Esetünkben elegendő mindent a körön kiszámolni, vagyis megszorítani a 3 dimenziós teret mindössze a körívre, ahol csak egy paraméterünk van, ϕ.

(a) Az össztöltés triviálisan nulla, mivel

$$Q \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(2\phi) = 0 \tag{8}$$

(b) A dipólus tag esetében a z irányú tag triviálisan nulla, mivel a kör a $z = 0$ síkban helyezkedik el.
Ezen felül az x komponens esetében ismét nullát kapunk, mivel

$$p_x \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos\phi \sin(2\phi) = \tag{9}$$

Míg az y komponens esetében pedig

$$p_y \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(2\phi) \sin(\phi) = 0 \tag{10}$$

(c) A kvadrupólus tenzor esetében csak két független elemünk van a $Q_{xy} = Q_{yx}$ és a közkedvelt $\mathrm{Tr}\underline{\underline{Q}} = 0$ megszorítások miatt:

$$Q_{xy} = a^3\lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, 3\cos\phi \sin\phi \sin(2\phi) = \frac{3}{2} a^3\lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin^2(2\phi) = \frac{3}{2}\pi a^3\lambda_0 = Q_{yx} \tag{11}$$

$$Q_{xx} = a^3\lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(2\phi)\big(2\cos^2\phi - \sin^2\phi\big) = a^3\lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(2\phi)\big(\cos^2\phi + \cos(2\phi)\big)$$
$$= a^3\lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \frac{\sin(2\phi)\cos(2\phi) + \sin(2\phi) + \sin(4\phi)}{2} = 0 \tag{12}$$

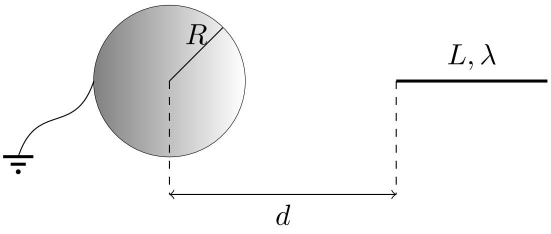
vagyiscsakoff-diagonális elemeink vannak.

(d) Innen a közelítő kifejezés:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\pi a^3\lambda_0}{4} \frac{\sin(2\phi)}{r^3} = \frac{3a^3\lambda_0}{16\varepsilon_0 r^3} \sin(2\phi) \tag{13}$$

3. Feladat (30 pont)

Adott egy R sugarú földelt fémgömb és a gömb középpontjától $d > R$ távolságra az x-tengely mentén egy L hosszúságú λ homogén töltéssűrűségű pálca. Vizsgáljuk a gömböt helyettesítő tükörtöltést.



(a) Milyen lesz a pálcához tartozó tükörtöltés alakja? Határozza meg a pálca egy, a gömb középpontjától x távolságra lévő, pont tükörképének x' távolságát! (5 pont)

(b) Az x és x' közötti összefüggés alapján határozza meg, hogy az x távolságra lévő $\mathrm{d}x$ hosszúságú szakaszhoz milyen $\mathrm{d}x'$ hosszúságú tükörtöltés tartozik! (10 pont)

(c) Hátorozza meg a pálca $\mathrm{d}x$ szakaszán lévő $\mathrm{d}q$ töltéshez tartozó $\mathrm{d}q'$ tükörtöltést. (5 pont)

(d) Ezek ismeretében fejezze ki λ'-t a gömb középpontjától mért x' távolság függvényében! (10 pont)

Megoldás:

(a) A tükörtöltések módszere alapján:

$$x' = \frac{R^2}{x} \tag{14}$$

(b) Ehhez egyszerűen csak vennünk kell az előző feladatbeli egyenletben mindkét oldal differenciájának abszolút értékét:

$$\mathrm{d}x' = \left| -\frac{R^2}{x^2}\mathrm{d}x \right| = \frac{R^2}{x^2}\mathrm{d}x \tag{15}$$

(c) A tükörtöltés nagysága a tanult összefüggés alapján:

$$dq' = -\frac{R}{x}dq \tag{16}$$

(d) Ezt kifejezve az eredeti λ töltéssűrűséggel és a tükörtötlés sűrűséggel:

$$\mathrm{d}x'\lambda' = -\frac{R}{x}\lambda\,\mathrm{d}x \Rightarrow \lambda' = -\frac{R}{x}\lambda\frac{x^2}{R^2} = -\frac{R}{x'}\lambda \tag{17}$$

4. Feladat (20 pont)

Tekintsünk egy L hosszúságú vezető csövet, melynek keresztmetszete egy a oldalú négyzet. A cső oldalait leföldeljük, végeit pedig az oldalaktól vékonyan elszigetelve lezárjuk és konstans V_0 potenciálra kapcsoljuk. A koordináta-rendszer origója legyen az így kapott hasáb egyik sarka, a hasáb tengelye legyen párhuzamos a z tengellyel és a hasáb az $x > 0$ $y > 0$ és $z > 0$ régióban helyezkedjen el.

Segítség:
A trigonometrikus függvények ortognalitási relációja: $\int_0^a \mathrm{d}x \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \frac{a}{2}\delta_{nm}$

(a) Készítsen ábrát az elrendezésről a koordinátázás feltüntetésével együtt! (2 pont)

(b) Írja fel a szeparált Laplace-egyenletet és adja meg a kapott egyenletben szereplő tagok általános megoldását! (3 pont)

(c) Adja meg a peremfeltételeket! (3 pont)

(d) Adja meg a tetszőleges $V_0(x, y)$ esetén érvényes általános megoldást a peremfeltételek felhasználásával! *Segítség:* Vizsgáljon egyszerre egy nem nulla peremet, majd használja a szuperpozíció elvét! (6 pont)

(e) Számolja ki az általános megoldásban szereplő kifejtési együtthatókat! Írja fel a kapott potenciál függvényt! (6 pont)

(f) **Bónusz:** Határozza meg az elektromos térerősséget a csövön belül, annak közepében a hossztengely mentén! (5 pont)

Megoldás:

(a) Rajz!

(b) Keressük a potenciált $\Phi = X(x)Y(y)Z(z)$ alakban és osszuk le a Laplace-egyenletet Φ-vel:

$$\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial_x^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial_y^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial_z^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{18}$$

$$\partial_x^2 X = -\alpha^2 X \tag{19}$$

$$\partial_y^2 Y = -\beta^2 Y \tag{20}$$

$$\partial_z^2 Z = \left(\alpha^2 + \beta^2\right) Z \tag{21}$$

ahol mind a három tag csak egy-egy konstanssal lehet egyenlő, illetve mivel mind y és x irányban két peremen is eltűnik a megoldás, negatív konstansokat kellett választanunk.

(c) Peremfeltételek:

$$X(x = 0, a) = 0 \tag{22}$$

$$Y(y = 0, a) = 0 \tag{23}$$

$$Z(z = 0, L) = V_0 \tag{24}$$

(d) Vizsgáljuk a szuperpozícióját annak a két rendszernek, amikor csak az egyik z peremen van V_0 potenciál, míg a másik 0 potenciálon van tartva:

$$\Phi_1 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m,1} \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \sinh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2+m^2}}{a}z\right) \Leftrightarrow Z(0)=0,\ Z(L)=V_0 \tag{25}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m,2} \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \sinh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2+m^2}}{a}(L-z)\right) \Leftrightarrow Z(L)=0,\ Z(0)=V_0 \tag{26}$$

Mindkét esetben a nem zérus határfeltételeket az ortogonalitási szabály segítségével használjuk fel a kifejtési együtthatók meghatározására:

$$\begin{aligned}&\int_0^a dxdy\, \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big)\, \Phi_1(x,y,L) = \int_0^a dxdy\, V_0(x,y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \\ &= A_{n,m,1}\frac{a^2}{4}\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}L\right)\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^a dxdy\, \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big)\, \Phi_2(x,y,L) = \int_0^a dxdy\, V_0(x,y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \\ &= -A_{n,m,2}\frac{a^2}{4}\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}L\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Ahonnan az teljes megoldás, bevezetve az $A_{n,m} = A_{n,m,1} = -A_{n,m,2}$ jelölést, mivel a két konstans csak egy előjelben különbözik egymástól

$$\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \left(\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}z\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}(z-L)\right)\right) \tag{29}$$

(e) Véve a specifikus V_0 potenciált, minden integrálból csak a páratlan n, m esetén kapunk nem nulla eredményt, amit legyegyszerűbben a következő módon fejezhetünk ki, $A_{n,m} = \frac{a^2}{\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}L\right)}(1-(-1)^n)(1-(-1)^m)$:

$$\begin{aligned}\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} &\frac{a^2(1-(-1)^n)(1-(-1)^m)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}L\right)} \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{m\pi}{a}y\Big) \\ \times &\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}z\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}(z-L)\right)\right)\end{aligned} \tag{30}$$

(f) Az elektromos térhez vegyük az x, y, z irányú deriváltakat és helyettesítsünk be $a/2$-t mindhárom értékre. Ekkor az x és y irányú deriváltak esetén $\sim \cos((2n+1)\,\pi/2)\sin((2n+1)\,\pi/2) = 0$ alakú tagjaink lesznek, amik így kiesnek a koszinusz tag miatt, a z irányú deriváltak esetén nem zérus eredményeink lesznek:

$$\mathbf{E} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a\sqrt{n^2+m^2}(1-(-1)^n)(1-(-1)^m)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}L\right)} \times \left(\cosh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\sqrt{n^2+m^2}\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-L\right)\right)\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{31}$$