FIGYELEM! MINDEN FELADATOT NÉVVEL ÉS NEPTUN KÓDDAL ELLÁTOTT KÜLÖN LAPON KELL BEADNI! EZT A FELADATLAPOT IS BE KELL ADNI !	**2022/2023** **Elektrodinamika gyakorlat 1.** **NZH 1, 2022. október 20.** **NEPTUN KÓD:** .... **NÉV:** .... **ÖSSZPONTSZÁM:** ....

1. Feladat (20 pont), Tükörtöltés: Adott két ponttöltés $+q$ és $-q$ töltéssel egymástól a távolságra. A töltések egy végtelen földelt fémlap felett helyezkednek el h magasságban, a fémlap a $z = 0$ síkban található. A pontöltések az x tengely mentén helyezkednek el, a pozitív töltés $a/2$-ben a negatív $-a/2$-ben.

(a) Adja meg azt a tükörtöltés elrendezést, amely teljesíti a feladatban megadott határfeltételeket, és $z \geq 0$-ra ugyanazt a potenciált adja! (**3 pont**)

(b) Adja meg a potenciált a $z \geq 0$ tértartományban! (**3 pont**)

(c) Határozza meg a síklap által az egyes töltésekre ható erő irányát és nagyságát! (**4 pont**)

(d) Határozza meg a töltés elrendezés energiáját! Először hozza be a negatív töltést a végtelenből majd a pozitív töltést a z tengellyel párhuzamosan mozgatva. (**4 pont**)

(e) Adja meg a $\sigma(x, y)$ felületi töltéssűrűséget a $z = 0$ síkban! (**3 pont**)

(f) Mekkora a fémlap össztöltése(**3 pont**)

Megoldás:

1. A két ponttöltés nagysága és helye: $(-q, a/2, -h)$, $(q, -a/2, -h)$

2. Ekkor a potenciál egyszerűen csak négy ponttöltés által keltett potenciálok összege/szuperpozíciója:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a/2)^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a/2)^2+y^2+(z-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a/2)^2+y^2+(z+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a/2)^2+y^2+(z+h)^2}}\right). \tag{1}$$

3. Az első, negatív, töltés behozásánál az az első negatív töltésre csak a tükörtöltés párja hat erővel:

$$W_1 = \int_h^\infty \mathrm{d}z\, \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4z^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}. \tag{2}$$

Ekkor a második töltés behozatalánál már hat arra a többi három töltés is, de ezeknek az erőknek csak a z irányú komponenseit kell tekintenünk:

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_h^\infty \mathrm{d}z\left(\frac{1}{4z^2} - \frac{z+h}{(z+h)^2+a^2)^{3/2}} + \frac{z-h}{(z-h)^2+a^2)^{3/2}}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{\sqrt{4h^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right). \tag{3}$$

Ahonnan az teljes munkavégzés egyszerűen:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{\sqrt{4h^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right). \tag{4}$$

4. A töltéssűrűséget a következőképpen lehet megadni, használva az ismert képletet $\sigma = -\varepsilon_0 \partial_z \Phi\Big|_{z=0}$

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(& -\frac{h}{((x-a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} + \frac{h}{((x+a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} \\ & + \frac{h}{((x+a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} - \frac{h}{((x-a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}}\Bigg) \\ = \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0}\Bigg(& -\frac{1}{((x-a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} + \frac{1}{((x+a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}}\Bigg).\end{aligned} \tag{5}$$

5. Innen az össztöltés egyszerűen a felületi integrál $z = 0$-n, azaz

$$Q = \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, \frac{1}{((x+a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} - \frac{h}{((x-a/2)^2+y^2+h^2)^{3/2}} = 0 \tag{6}$$

mivel a konstans a eltoláson felül ugyanazt az integrált végezzük el és vonjuk ki egymásból, amiknek azonban a határ végtelen, így az integrálok értéke nem függ a kosntans eltolásoktól! Másik megfontolás: a rendszer kezdeti össztöltése nulla, így a teljes indukálódott töltésnek is egyenlőnek kell lennie ezzel!

---

2. Feladat (20 pont), Laplace-egyenlet: Vegyünk két darab a szélességű és egy darab b szélességű végtelen hosszúságúnak tekinthető fémlapot. Ezeket forrasszuk össze úgy, hogy egy egyik oldalán nyitott téglalap alapú hasábot kapjunk. Majd a nyitott oldalt zárjuk le egy szintén végtelen hosszú, b széles szigetelő lappal, amin a potenciált

$$V_0(y) = \begin{cases} 2V_0\dfrac{y}{b} & \text{ha} \quad 0 < y < \dfrac{b}{2} \\ -2V_0\dfrac{y-b}{b} & \text{ha} \quad \dfrac{b}{2} < y < b \end{cases}$$

értéken rögzítettük. A hasáb tengelye legyen a z-tengely, az egyik a oldalú lapja illeszkedjen az x-tengelyre, a b oldalú fém lapja az y-tengelyre és az első síknegyedben helyezkedjen el.

(a) Készítsén ábrát az elrendezésről a koordinátatengelyek és a méretek pontos feltüntetésével! (**3 pont**)

(b) Adja meg a potenciálra vonatkozó határfeltételeket. (**4 pont**)

(c) A határfeltételek segítségével írja fel az általános $V_0(y)$ potenciálhoz tartozó megoldást. (**4 pont**)

(d) Az ortogonalitási relációk segítségével határozza meg az általános megoldásban szereplő kifejtési együtthatókat a feladatban megadott potenciálra. (**5 pont**)

(e) Adja meg a potenciált és az elektromos térerősséget a hasábon belül! (**4 pont**)

Megoldás:

Az általános megoldást ismét, $\Delta\Phi = 0$, $\Phi = X(x)Y(y)$ alakban keressük.

1. Határfeltételek:

$$\Phi(x = a; y) = V_0(y) \tag{7}$$
$$\Phi(x; y = 0, b) = 0 \tag{8}$$
$$\Phi(x = 0; y) = 0 \tag{9}$$

2. A határfeltételek alapján:

$$\partial_y^2 Y = -\alpha^2 Y \to Y(y) \sim \sin(\alpha y)\,, \tag{10}$$
$$\partial_x^2 X = \alpha^2 X \to X(x) \sim \sinh(\alpha x)\,. \tag{11}$$

A határfeltétel alapján $\alpha_n = \frac{n\pi}{b}$ és ekkor az általános megoldás:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\,, \tag{12}$$

3. Az utolsó peremfeltétel alapján pedig

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh(\frac{n\pi}{b}a) = V_0(y)\,. \tag{13}$$

Most használva az ortogonalitási szabályt:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\frac{2V_0}{b}\left(\int_0^{b/2} \mathrm{d}y\, y \sin(\frac{n\pi}{b}y) - \int_{b/2}^{b} \mathrm{d}y\,(y-b)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\right) \\ &= \frac{8V_0}{b^2\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\int_0^{b/2}\mathrm{d}y\, y\sin(\frac{n\pi}{b}y) = \frac{8V_0}{\pi^2 n^2 \sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\mathrm{d}y\, y\sin(y) \\ &= -\frac{8V_0}{\pi^2 n^2\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\left(\sin(n\pi/2) + \pi n/2\cos(\pi n/2)\right)\,, \end{aligned} \tag{14}$$

ami utolsó kifejezés $n = 4k$ esetén $A_{4k} = \frac{4V_0}{n\pi\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}$, míg $n = 2k+1$ esetén $A_{2k+1} = -\frac{8V_0}{n^2\pi^2\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}$, ileltve $n = 4k+2$ esetén $A_{4k+2} = -\frac{4V_0}{n\pi\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}$.

4. Vagyis a potenciál ezek ismeretében

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{4V_0}{\pi\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}\sin(\frac{4k\pi}{b}y)\sinh(\frac{4k\pi}{b}x) - \frac{1}{4k+2}\sin(\frac{(4k+2)\pi}{b}y)\sinh(\frac{(4k+2)\pi}{b}x) \\ -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}\sin(\frac{(2k+1)\pi}{b}y)\sinh(\frac{(2k+1)\pi}{b}x) \end{aligned} \tag{15}$$

Ahonnan a térerőség egyszerűen véve a deriváltakat:

$$E_x = \frac{4V_0}{\pi \sinh(\frac{n\pi}{b}a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{16k^2\pi} \sin(\frac{4k\pi}{b}y) \cosh(\frac{4k\pi}{b}x) - \frac{b}{(4k+2)^2\pi} \sin(\frac{(4k+2)\pi}{b}y) \cosh(\frac{(4k+2)\pi}{b}x) \tag{16}$$

$$- \frac{2b}{(2k+1)^3\pi^2} \sin(\frac{(2k+1)\pi}{b}y) \cosh(\frac{(2k+1)\pi}{b}x) \tag{17}$$

$$E_y == \frac{4V_0}{\pi \sinh(\frac{n\pi}{b}a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{16k^2\pi} \cos(\frac{4k\pi}{b}y) \sinh(\frac{4k\pi}{b}x) - \frac{b}{(4k+2)^2\pi} \cos(\frac{(4k+2)\pi}{b}y) \sinh(\frac{(4k+2)\pi}{b}x) \tag{18}$$

$$- \frac{2b}{(2k+1)^3\pi^2} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{b}y) \sinh(\frac{(2k+1)\pi}{b}x) \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

---

3. Feladat (30 pont), Töltéseloszlás energiája: Teküntsük az alábbi henger koordintákban adott töltés eloszlást,

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad r < a \\ -\rho_0 \dfrac{a}{r} & \text{ha} \quad a < r < b \\ 0 & \text{ha} \quad b < r \end{cases}$$

mely egy végtelen hosszúságú üreges henger töltéseloszlását adja meg.

(a) Számolja ki a hosszegységre eső töltést! (**4 pont**)

(b) Számolja ki a térerősséget a Gauss-törvény felhasználásával mindenhol a térben! (**5 pont**)

(c) Ábrázolja a kapott térerősséget a z-tengelytől mért távolság függvényében. Ügyeljen rá, hogy a tértartományok határán pontosan jelölje a függvény értékét! (**3 pont**)

(d) Számolja ki az elektromos potenciált mindenhol a térben! A potenciál nulla értékét az $r = b$ pontban rögzítse nullának! (**5 pont**)

(e) Ábrázolja a kapott potenciált a z-tengelytől mért távolság függvényében. Ügyeljen rá, hogy a tértartományok határán pontosan jelölje a függvény értékét! (**3 pont**)

(f) Határozza meg a töltéseloszlás hosszegységre eső energiáját a térerősségből, a felületi tagot az $r = b$ füleleten vegye! (**5 pont**)

(g) Határozza meg a töltéseloszlás hosszegységre eső energiáját a potenciálból és a töltéseloszlásból! (**5 pont**)

Megoldás:

1. A hosszegységre eső töltés egyszerűen

$$Q = -2\rho_0 a\pi \int_a^b \mathrm{d}r r \frac{1}{r} = 2\pi\rho_0 a(a-b)\,. \tag{21}$$

2. Gauss-tétel hengerszimmetria esetén, hosszegységre

$$E = 0, \text{ ha } r < a\,, \tag{22}$$
$$2\pi r E = 2\pi\rho_0 a(a-r)/\varepsilon_0 \to E(r) = \rho_0 a(a-r)/(r\varepsilon_0), \text{ ha } a < r < b\,, \tag{23}$$
$$2\pi r E = 2\pi\rho_0 a(a-b)/\varepsilon_0 \to E(r) = \rho_0 a(a-b)/(r\varepsilon_0), \text{ ha } r > b\,. \tag{24}$$

3. Rajz!

4. A potenciál egyszerűen visszaintegrálva:

$$\Phi(r) = -\rho_0 a(a\ln(a/b) + a - b)/\varepsilon_0, \text{ ha } r < a\,, \tag{25}$$
$$\Phi(r) = \left(-\rho_0 a^2 \ln(r/b) + \rho_0 a r - \rho_0 a b\right)/\varepsilon_0, \text{ ha } a < r < b\,, \tag{26}$$
$$\Phi(r) = \rho_0 a(b-a)\ln(r/b)/\varepsilon_0, \text{ ha } r > b\,, \tag{27}$$

Ahol legkényelmsebben először $r > b$-re integráltuk ki a potenciált és úgy válaszottuk meg a kostnans eltolást, hogy $r = b$- ben eltűnjön a potenciál. Ezt követően kiintegrálva az $a < r < b$ tartományra, szintén úgy választottu kmeg a konstansokat, hogy $r = b$ esetén eltűnjön a potenciál. Majd ez alapján $r < a$ esetén egyszerűen az $r = a$-ban felvett kosntanssal lesz egyenlő a potenciál.

5. Rajz!

6. Mivel az $r = b$ felületen nulla a potenciál, csak az első tagot kell figyelembe vennünk, melyet csak egy tértartományban kell kiszámítanunk, ha a térfogatnak az $r < b$ tartományt vesszük:

$$W = \frac{\rho_0^2 a^2 \pi}{\varepsilon_0} \int_a^b \mathrm{d}r \, \frac{(a-r)^2}{r} = \frac{\rho_0^2 a^2 \pi}{\varepsilon_0} \left(a^2 \ln(b/a) - 2a(b-a) + (b-a)^2/2 \right) . \tag{28}$$

7. Most a potenciál segítségével csak a középső tartományban kell vizsgálódnunk, hiszen, csak ott nem zérus a töltéssűrűség:

$$W = \frac{\rho_0 a \pi}{\varepsilon_0} \int_a^b \mathrm{d}r \, \rho_0 a \ln(r/b) - \rho_0 r + \rho_0 b = \frac{\rho_0^2 a^2 \pi}{\varepsilon_0} \left(a^2 \ln(b/a) - 2a(b-a) + (b-a)^2/2 \right) \tag{29}$$

---

4. Feladat (30 pont), Multipólus sorfejtés: Két ponttöltést helyezünk el az xy síkon, $4q$ töltést helyezünk az (a, b) pontba és $-2q$ töltést a $(-a, -b)$ pontba.

(a) Adja meg az elrendezés töltését és dipól momentumát! (**4 pont**)

Vegyünk további két töltést, melyeket a $-\frac{a}{b}$ iránytangensű egyenes mentén szeretnénk elhelyezni. Az egyik töltés nagysága q és az origóra szimmetrikusan szeretnénk elhelyezni őket úgy hogy az elrendezés össztöltése nulla legyen, a dipólmomentum pedig az pozitív y irányba mutasson.

(b) Mekkora legyen a másik töltés nagysága? (**3 pont**)

(b) Hová helyezzük a két töltést, hogy a megadott két feltétel teljesüljön? Készítsen ábrát is! (**6 pont**)

(b) Mekkora az új elrendezésben a dipól momentum nagysága? (**3 pont**)

(b) Számolja ki az új elrendezés kvadrupól tenzorát! (**8 pont**)

(b) Adja meg az új elrendezés potenciálját az (r, θ, ϕ) gömbkoordinátákban kvadrupól rendig! (**6 pont**)

Megoldás:

1. Az össztöltés egyszerűen a töltések összege, $Q = 2q$. A dipólus pedig a töltések helyvektorainak a töltésekkel súlyozott átlaga:

$$\mathbf{p} = 6qa\hat{\mathbf{x}} + 6qb\hat{\mathbf{y}} \, . \tag{30}$$

2. Mivel azt követeltük meg, hogy az össztöltés legyen zérus, a másik töltés nagysága $-3q$

3. Úgy kell elhelyezni, hogy az x irányú, az új töltésekkel súlyozott helyvektor átlag kiejtse az eredeti két töltés járulékát: $-6qa\hat{\mathbf{x}}$, ahonnan a helyek $1.5a$ a $-3q$ töltés esetén és $-1.5a$ a q töltés esetén, ekkor az y koordinátákcrendre, $\mp 1.5b$, ami éppen ugyanakkora y irányú járulékot ad, azaz a végső dipólus momentum

$$\mathbf{p} = 12qb\hat{\mathbf{y}} \, . \tag{31}$$

4. Esetünkben továbbra is az általánosság megcsorbítása nélkül háromdimenziós tenzort tekintenünk, amihez csak kettő független mátrix elemet kell kiszámolnunk a $\mathrm{Tr}Q = 0$ azonosság miatt.

   Ekkor

$$Q_{xx} = q\left(4(2a^2 - b^2) - 2(2a^2 - b^2) + (4.5a^2 - 2.25b^2) - 3(4.5a^2 - 2.25b^2)\right) = (-5a^2 + 2.5b^2)q\,, \tag{32}$$

$$Q_{xy} = q\,(12ab - 6ab + 6.75ab - 20.25ab) = -7.5abq\,. \tag{33}$$

   ahonnan $Q_{xy} = Q_{yx} = -7.5ab$. Látható módon a $Q_z x = Q_{zy} = 0$, mivel mindegyik tagan szerepelne a töltések helyének z koordinátája, ami pedig nulla. Figyelni kell azonban, mivel a Q_{zz} nem lesz zérus hiszen:

$$Q_{zz} = -q(a^2 + b^2)\,(4 - 2 - 6.75 + 2.25) = -2.5q(a^2 + b^2)\,, \tag{34}$$

   ahonnan $Q_{yy} = 7.5abq + 2.5q(a^2 + b^2)$.

5. A közelítő kifejezés a teljes rendszerre, ahol $Q = 0$ és $\mathbf{p} = 12qb\hat{\mathbf{y}}$:

$$\Phi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{12qb\sin\theta\sin\varphi}{r^2} + \frac{q}{2}\times \frac{-7.5ab\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - 7.5ab\sin^2\theta\cos^2\varphi + \left(7.5ab + 2.5(a^2 + b^2)\right) sin^2\theta\sin^2\varphi - 2.5(a^2 + b^2)\cos^2\theta}{r^3}\Big) \tag{35}$$
