1. Feladat (30 pont)

Adott a következő potenciál gömbi koordináta-rendszerben:

$$\Phi(r) = \begin{cases} q_0 \dfrac{\cos\left(\dfrac{r\pi}{a}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$

Segítésg:

A Laplace-operátor gömbi koordináta-rendszerben:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi(\mathbf{r})\right)$$

(a) Vizsgálja meg, hogy van-e ponttöltés a rendszerben! (**5 pont**)

(b) Számolja ki az elektromos térerősséget! (**5 pont**)

(c) Adja meg a σ felületi töltéssűrűséget! (**5 pont**)

(d) Adja meg a teljes $\rho(r)$ töltéssűrűséget a rendszerben! (**5 pont**)

(e) A teljes töltéssűrűség ismeretében határozza meg a rendszer elektrosztatikus energiáját (Figyelem: a lenti képlet csak folytonos töltéseloszlásokra igaz!) (**10 pont**)
Segítség:

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \Phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})$$

(f) **Bónusz! + 5 pont**: Számítsa ki a rendszer energiáját a térerősség segítségével is!
Segítség:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\, \mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\right)$$

Megoldás:

(a) Vizsgáljuk meg a legelső rendet a potenciál Taylor-sorában:

$$\Phi(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right) - 1}{r}\right) + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \equiv \Phi_{\mathrm{sz}}(r) + \Phi_{\mathrm{f}}(r) \tag{1}$$

$$\Phi_{\mathrm{sz}}(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2}$$

$$\Phi_{\mathrm{f}}(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

Vagyis látható, hogy van egy $\frac{1}{r}$ alakú szinguláris potenciál és egy $\frac{\cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) - 1}{r} = \frac{\pi^2}{a^2} r/2 + \ldots$ reguláris részünk, melyből a szinguláris tisztán indikálja a ponttöltés jelenlétét.

(b) A térerősségnél kihasználjuk, hogy a potenciál alakja miatt csak radiális lehet, azaz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow E(r) = -\partial_r\Phi(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r^2} + \frac{\pi}{a}\frac{\sin\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r}\right] \tag{4}$$

Illetve $E(r) = 0$, ha $r > a$,

(c) A térerősség ugrása a peremen pedig, $E(r+) - E(r-) = \frac{q_0}{4a^2\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \frac{q_0}{4\pi a^2}$ megadva a felületi töltéssűrűséget.

(d) A teljes töltéssűrűség a ponttöltés és a folytonos eloszlásból tevődik össze, $\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{sz}}(r) + \rho_{\mathrm{f}}(r)$, ahol a ponttöltés nagysága egyszerűen leolvasható az $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$-es tag együtthatójából, míg a második tagnál alkalmazzuk a Poisson-egyenletet:

$$\rho_{\mathrm{sz}}(\mathbf{r}) = q_0\delta(\mathbf{r}) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{\mathrm{f}}(r) &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\Phi_{\mathrm{f}}\right) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\partial_r\left(-\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right) - \frac{r\pi}{a}\sin\left(\frac{r\pi}{a}\right)\right)\\ &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{r^2 a}\sin\left(\frac{r\pi}{a}\right) - \frac{\pi}{r^2 a}\sin\left(\frac{r\pi}{a}\right) - \frac{\pi^2}{a^2 r}\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)\right) = -\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho_{\mathrm{f}}(r) = \frac{q_0\pi}{4a^2}\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r}\end{aligned} \tag{6}$$

(e) Mivel a ponttöltés és a potenciál között nincsen pár kölcsönhatás, illetve a megadott képletben a pontötlés önkölcsönhatását nem szabad figyelembe vennünk, a következő képlet írható fel az elektrosztatikus energiára:

$$W = 4\pi\int_0^a \mathrm{d}r r^2\left(\frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{f}} + \Phi_{\mathrm{sz}}\rho_{\mathrm{f}} + \Phi_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{sz}}\right) \tag{7}$$

$$2\pi\int_0^a \mathrm{d}r\; r^2\Phi_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{f}} = 2\pi\int_0^a \mathrm{d}r\; r^2\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{q_0\pi}{4a^2}\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r}\right) \tag{8}$$

$$= \frac{q_0^2\pi}{8a^2\epsilon_0}\int_0^a \mathrm{d}r\;\left(\cos^2\left(\frac{r\pi}{a}\right) - \cos\left(\frac{r\pi}{a}\right) + \frac{r\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{a}\right) \tag{9}$$

$$= \frac{q_0^2\pi}{8a^2\epsilon_0}\left(\frac{a}{2} - 0 - \frac{2a}{\pi^2}\right) \tag{10}$$

$$2\pi\int_0^a \mathrm{d}r\; r^2\Phi_{\mathrm{sz}}\rho_{\mathrm{f}} = 2\pi\int_0^a \mathrm{d}r\; r^2\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{q_0\pi}{4a^2}\frac{\cos\left(\frac{r\pi}{a}\right)}{r}\right) = 0 \tag{11}$$

$$\int \mathrm{d}^3r\Phi_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{sz}} = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{12}$$

$$W = \frac{q_0^2\pi}{16\epsilon_0 a} \tag{13}$$

---

2. Feladat (20 pont)

Egy földelt végtelen nagy kiterjedésű fémlap helyezkedik el az x, y síkban, felette egy homogén λ lineáris töltéssűrűségű végtelen hosszú pálca a $z = a$ magasságban az x tengellyel párhuzamosan, $y = 0$-ban.

(a) Adja a meg a helyettesítő elrendezést, készítsen ábrát mindkét elrendezésről! (**5 pont**)

(b) Határozza meg a potenciált mindenhol a $z > 0$ térrészben! (**5 pont**)

(c) Határozza meg a fémlap felületi töltéssűrűségét? (**5 pont**)

(d) Adja meg a hosszegységére ható erőt a pálcán! (**5 pont**)

Megoldás:

(a) A helyettesítő elrendezés a $z = -a$ magasságban húzódó $-\lambda$ lineáris töltéssűrűségű pálca.

(b) Alkalmazva a Gauss-tételt a pálca egy tetszőleges L hosszúságú darabjára:

$$\begin{aligned}&\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \mathbf{E} = E(r)\,\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}\\ &\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\end{aligned} \tag{14}$$

amiből a teljes térerősség figyelembe véve azt is, hogy a pálcák a $z = \pm a$ pozícióban vannak, $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$, ahol $r_\pm = |\mathbf{r} \mp a\hat{\mathbf{z}}|$.
Ahonnan a potenciál:

$$-\partial_r \Phi(r) = E(r) \Rightarrow \Phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \tag{15}$$

(c) A felületi töltéssűrűség a potenciál felületen vett normális komponenséből határozható meg, ami a $z = 0$-ban éppen a térerősség radiális komponensével egyezik meg:

$$\sigma = -\varepsilon_0 E(0) = \frac{\lambda}{\pi a} \tag{16}$$

(d) Ehhez az egyik pálca által keltett elektromos teret kell tekintenünk $2a$ távolsággal, illetve beszorozni az egységnyi hosszhoz tartozó töltéssel, $\Delta q = \lambda$:

$$|\mathbf{F}| = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\hat{\mathbf{z}} \tag{17}$$

---

3. Feladat (30 pont) Adott egy négyzet alakú, a hosszúságú vezetőkeret az x, y síkban, oldalai illeszkednek a x és y tengelyekre, illetve egyik sarka az origóban található. Az x és y tengelyekre illeszkedő oldalakat leföldeljük, míg az $y = a$ oldalra $V_y(x) = \sin^4(x)$, illetve az $x = a$ lévő oldalra $V_x(y) = \cos^2(y)$ potenciált kapcsolunk.
Segítség: A trigonometrikus függvények ortogonalitási relációja:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}(\delta_{n+m,-1} + \delta_{n+m,1} + \delta_{n-m,1} + \delta_{n-m,-1})$$

(a) Készítsen ábrát az elrendezésről! (**5p**)

(b) Adjon meg olyan elrendezéseket, melyek szuperpozíciójából előállítható a feladatban adott potenciál konstrukció, ezeket ábrával szemléltesse! (**5p**)

(c) Írja fel a Laplace-egyenletet és a vonatkozó peremfeltételeket az előbbi elrendezésekre! (**5p**)

(d) Adja meg a Laplace-egyenlet általános megoldását az előbbi elrendezésekre a csövön belüli térrészben! (**5p**)

(e) Határozza meg az általános megoldásokban szereplő kifejtési együtthatókat és írja fel a potenciálfüggvényt! (**5p**)

(f) Számolja ki az elektromos térerősséget a négyzet közepén, vagyis az $(a/2,a/2)$ pontban! (**5p**)

Megoldás:

(a) Nagyon fontos(!!!): a z irányban való végtelenség azt jelenti, hogy egy kétdimenziós problémát kell csak vizsgálnunk az x, y síkban $\Phi(x, y)$ potenciállal!

(b) A két elrendezést az x és y oldalakon lévő potenciálok szétválasztásával különböztetjük meg, vagyis egyik esetben $V_x(y) = 0$, míg a másik, szuperponálandó elrendezésben $V_y(x) = 0$.

(c) A két esetben a a változószeparáció utáni egyenleteket a következő alakban kereshetjük:

$$\Delta\Phi(x,y) = 0,\ \Phi(x,y) = X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{\partial_x^2 X}{X} + \frac{\partial_y^2 Y}{Y} = 0 \tag{18}$$

$$V_x(y) = 0 \text{ és } Y_1(y = 0, a) = 0,\ X_1(x = 0) = 0 \Leftrightarrow \partial_x^2 X_1 = \alpha^2 X_1,\ \partial_y^2 Y_1 = -\alpha^2 Y_1 \tag{19}$$

$$X_1(x) \sim \sinh(\alpha_n x)\,,\ \ Y_1(x) \sim \sin(\alpha_n y)\,,\ \ \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \tag{20}$$

$$V_y(x) = 0 \text{ és } X_2(x = 0, a) = 0,\ Y_2(y = 0) = 0 \Leftrightarrow \partial_x^2 X_2 = -\alpha^2 X_2,\ \partial_y^2 Y_2 = \alpha^2 Y_2 \tag{21}$$

$$X_2(x) \sim \sin(\alpha_n x)\,,\ \ Y_2(x) \sim \sinh(\alpha_n y)\,,\ \ \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \tag{22}$$

A két elrendezésben az általános megoldás:

$$\Phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) \tag{23}$$

$$\Phi_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) \tag{24}$$

Most a két határfeltétel a két szuperponált elrendezésben a következőket adja:

$$\int_0^a \mathrm{d}y\, \Phi_1(a,y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) = \int_0^a \mathrm{d}y\, V_x(y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) = \int_0^a \mathrm{d}y\, V_x(y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) = \frac{a}{2}A_n \sinh(n\pi) \tag{25}$$

$$\int_0^a \mathrm{d}x\, \Phi_2(x,a) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = \int_0^a \mathrm{d}x\, V_y(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = \int_0^a \mathrm{d}y\, V_y(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = \frac{a}{2}B_n \sinh(n\pi) \tag{26}$$

A két integrál kiszámításához felhasználjuk a következő azonosságokat, melyek a $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ kibontásához adott segédletekből egyszerűen levezethetőek:

$$\sin^4\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos\Big(\frac{2n\pi}{a}x\Big) + \frac{1+\cos\big(\frac{4n\pi}{a}x\big)}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\cos\big(\frac{2n\pi}{a}x\big)}{2} + \frac{\cos\big(\frac{4n\pi}{a}x\big)}{8} \tag{27}$$

$$\cos^2\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) = \frac{1+\cos\big(\frac{2n\pi}{a}y\big)}{2}. \tag{28}$$

Illetve ekkor alkalmazva az szinusz és koszinuszokra vonatkozó ortogonalitási azonosságokat:

$$\begin{aligned}&\int_0^a \mathrm{d}y\, V_x(y) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) = \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}y\left(1+\cos\Big(\frac{2\pi}{a}y\Big)\right)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big)\\ &= \frac{a}{2\pi}(\delta_{n,1} - \delta_{n,1} + \delta_{n,3}) = \frac{a}{2}A_n\sinh(n\pi) \Rightarrow A_n = \frac{1}{\pi\sinh(n\pi)}\delta_{n,3}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^a \mathrm{d}y\, V_y(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = \int_0^a \mathrm{d}y\left(\frac{3}{4} - \frac{\cos\big(\frac{2\pi}{a}y\big)}{2} + \frac{\cos\big(\frac{4\pi}{a}y\big)}{8}\right)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big)\\ &= \frac{a}{\pi}\left(\frac{5}{4}\delta_{n,1} - \frac{5}{8}\delta_{n,3} + \frac{1}{8}\delta_{n,5}\right) = \frac{a}{2}B_n\sinh(n\pi)\\ &\Rightarrow B_n = \frac{2}{\pi\sinh(n\pi)}\left(\frac{5}{4}\delta_{n,1} - \frac{5}{8}\delta_{n,3} + \frac{1}{8}\delta_{n,5}\right)\end{aligned} \tag{30}$$

Vagyis összességében a következő nem zérus együtthatók adódnak:

$$A_3 = -\frac{1}{\pi\sinh(n\pi)} \tag{31}$$

$$B_1 = \frac{5}{2\pi\sinh(n\pi)},\ B_3 = -\frac{5}{4\pi\sinh(n\pi)},\ B_5 = \frac{1}{4\pi\sinh(n\pi)} \tag{32}$$

---

4. Feladat (20 pont)

Adott egy R sugarú gömb a következő töltéseloszlással:

$$\rho(r,\theta) = \rho_0 e^{-\lambda r}\sin\theta \tag{33}$$

(a) Számítsa kis a rendszer monopólus járulékát! (**5 pont**)

(b) Számítsa kis a rendszer dipólus járulékát! (**5 pont**)

(c) Számítsa kis a rendszer kvadrupólus járulékát! (**5 pont**)

(d) Írja fel a közelítő potenciált gömbi koordinátákban! (**5 pont**)

Segítség:

$$\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 e^{-\lambda r} = \lambda^{-3}\Big(2 - \left(R^2 + 2R + 2\right) e^{-\lambda R}\Big) \tag{34}$$

$$\int_0^R \mathrm{d}r\, r^4 e^{-\lambda r} = \lambda^{-5}\Big(24 - \left(R^4 + 4R^3 + 12R^2 + 24R\right) e^{-\lambda R}\Big) \tag{35}$$

Megoldás:

(a) A monopólus egyszerűen csak a rendszer teljes töltése:

$$Q = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) = 2\pi \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta\, r^2 \rho_0 e^{-\lambda r} \sin\theta = \pi^2 \lambda^{-3} \rho_0 \Big(2 - \left(R^2 + 2R + 2\right) e^{-\lambda R}\Big) \tag{36}$$

(b) A dipólus vektor kiszámításához kihasználjuk, hogy az p_x és p_y komponens tartalmaz explicit azimut szögfüggést, $p_x \sim \cos\varphi$, $p_y \sim \sin\varphi$, amit a megfelelő szögintegrál lenulláz, $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos\varphi = 0$, ami a p_z komponenst illeti, ott a következő szögintegrállal találjuk szembe magunkat:

$$p_z = 2\pi\rho_0 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin^2\theta \cos\theta \int_0^R = 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \cos\theta - \cos\theta\cos(2\theta) = 0 \tag{37}$$

Vagyis összességében, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

(c) A kvardrupólus mátrix kiszámításához ismét felhasználjuk a z tengely körüli forgásszimmetriát, azaz biztos, hogy a következő alakot ölti a tenzor:

$$\underline{\underline{Q}} = D \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

ahol $D = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\left(2z^2 - x^2 - y^2\right)$, ami gömbi koordinátákban a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} D &= 2\pi\rho_0 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 e^{-\lambda r} \sin\theta r^2 \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= 2\pi\rho_0 \Big(24 - \left(R^4 + 4R^3 + 12R^2 + 24R\right) e^{-\lambda R}\Big) \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) - \sin^4\theta \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\rho_0 \lambda^{-5} \Big(24 - \left(R^4 + 4R^3 + 12R^2 + 24R\right) e^{-\lambda R}\Big) \end{aligned} \tag{39}$$

Ahol megjelenő szögintegrálból csak a konstans tag fog járulékot adni, ami pedig $\frac{1}{2}\sin^2(2\theta) - \sin^4\theta = \frac{1}{4} - \frac{\cos(4\theta)}{4} - \frac{1}{4}(1 - \cos(2\theta))^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos(4\theta)}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4\theta))\right) \Rightarrow$ konstans rész: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

(d) A potenciál gömbi koordinátákban egyszerűen ezek után, megtartva az egyszerűség kedvéért a D jelölést a kvadrupólus tagban:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{1}{2} \frac{D\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)}{r^3} \right) \tag{40}$$