Példák: Töltéseloszlás energiája, ponttöltés fogalma

FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA (ÓRAI ANYAG ISMÉTLÉSE)

Véges térrészben lokalizált folytonos töltéseloszlás esetén a töltéseloszlás létrehozásához szükséges munkát felírhatjuk a

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{1}$$

alakban. A differenciális Gauss-tétel, és a elektromos tér és a potenciál közötti összefüggés segítségével W átalakítható a

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_V E^2 d\mathbf{r} + \oint_F \Phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{f}\right), \tag{2}$$

alakra. A V és a F kifejezések térfogati és felületi integrálokat jelölnek. A felülettel a végtelenhez tartva, a térfogati integál az egész térre kiterjed, míg a felületi járulék nullához tart.

I. GÖMBSZIMMETRIKUS FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA

Adott egy q töltésű homogén eloszlású, R sugarú gömb. Számolja ki ennek a rendszernek az energiáját négyféleképpen!

- A (1) egyenlet alapján.
  Megoldás:
  Homogén eloszlás esetén a teljes töltés a megszokott módon $q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$, a potenciál a Gauss-tétel értelmében (lásd 2. Gyakorlat III./3.), $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$, ha $r < R$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{3kq}{2R}, \text{ ha } r < R\\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{kq}{r}, \text{ ha } r > R,\end{aligned} \tag{3}$$

  ahol az első tagban a konstans eltolás biztosítja a potenciál folytonosságát.
  Tehát az integrálási tartomány az (1)-es egyenletben csak a gömb belsejében nem ad nullát, mivel ha $r > R$, $\rho = 0$, ahol kihasználjuk ismét, hogy gömbi koordinátákban dolgozunk és minden csak a radiális változótól függ:

$$W = 2\pi\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2\left(-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{3kq}{2R}\right)\rho = -\frac{2\pi\rho^2 R^5}{30\varepsilon_0} + \frac{q\rho R^2}{4\varepsilon_0} = \frac{q\rho R^2}{5\varepsilon_0}. \tag{4}$$

- A (2) egyenlet alapján, ha a felület a végtelenben van.
  Megoldás:
  Az elektromos tér ismét a Gauss-tételből számolva:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}, \text{ ha } r < R\\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \text{ ha } r > R\end{aligned} \tag{5}$$

  Az első integrált két részre kell bontanunk, míg a második zérust ad, hiszen a végtelenben a szorzat $\sim \frac{1}{R^3}$ szerint cseng le, míg a felület $\sim R^2$ szeint nő!

$$W = 2\pi\varepsilon_0\left(\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2\frac{r^2\rho^2}{9\varepsilon_0^2} + \int_R^\infty \mathrm{d}r\, r^2\frac{k^2q^2}{r^4}\right) = 2\pi\varepsilon_0\left(\frac{R^5\rho^2}{45\varepsilon_0^2} + \frac{k^2q^2}{R}\right) = 2\pi\varepsilon_0\frac{6k^2q^2}{5R} = \frac{q\rho R^2}{5\varepsilon_0} \tag{6}$$

- A (2) egyenlet alapján, ha a felület egy a sugarú gömb amely az eredeti R sugarú gömbbel koncentrikus és $a > R$.
  Ekkor ki kell számítanunk a fentebbi integrált azzal a különbséggel, hogy a második tagban csak a-ig integrálunk, illetve a felületi tagot is csak egy a sugarú gömbfelszínre kell kiszámítanunk:
$$\begin{aligned} 2\pi\varepsilon_0 \int_R^a \mathrm{d}r\, r^2 \frac{k^2q^2}{r^4} &= 2\pi\varepsilon_0 k^2 q^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right) \\ \oint_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \frac{k^2q^2}{r^3} = 4\pi a^2 \frac{k^2q^2}{a^3} &= \frac{4\pi k^2 q^2}{a} \end{aligned} \tag{7}$$
  Látható, hogy a felületi tag éppen kiejti a véges a értékből eredő tagot, vagyis visszakaptuk az eredeti kifejezést a térfogati integrálon belül, a $r > R$ tartományra!
- A gömböt gömbhéjonként építjük fel, úgy, hogy minden héjon dq mennyiségű töltést kenünk szét. Mennyi munkát vegzünk, ha a "szétkenés" által a gömb sugara dr-rel növekszik? Integrálja az így kapott mennyiséget, azaz számítsa ki az R sugarú, q töltésű gömb által tárolt energiát!
  Megoldás:
  Egy r sugarú gömb, rajta dq töltés esetén először adjuk meg, mennyi munkát végzünk ha a gömbhéj sugarát dr-el megnöveljük. Ehhez ki kell számítani az energiát egy r sugarú, dr vastagságú gömbhéjra, ahol $\mathrm{d}q_r = \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi/3R^3} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{3q}{R^3} r^2 \mathrm{d}r$, illetve az ehhez tartozó potenciál, $\mathrm{d}\Phi = \frac{k\mathrm{d}q}{r} = \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{R^3 r'}$. Innen már könnyen felírható a gömbhéj energiájának megváltozása:
$$\mathrm{d}W = 4\pi \int_r^R \mathrm{d}r' \left(r'\right)^2 \rho \frac{3kqr^2}{R^3 r'} = 4\pi\rho \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{2R^3} \left(R^2 - r^2\right) \tag{8}$$
  Ahonnan kiintegrálható a teljes energia is:
$$W = \int_0^R \mathrm{d}r\, 4\pi\rho \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{2R^3} \left(R^2 - r^2\right) = 4\pi \frac{kq\rho R^2}{5} = \frac{q\rho R^2}{5} \tag{9}$$

Mi történik az elektromos térrel és potenciállal a gömbön belül és kívül, illetve a rendszer energiájával az $R \to 0$ határesetben, ha a q töltés közben állandó marad?
Megoldás:
Míg R$\to$ 0, de $q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \equiv$ állandó:
$$W = \frac{q\rho 4\pi R^3}{3} \frac{3}{40\pi\varepsilon_0 R} \sim \frac{1}{R} \tag{10}$$
Vagyis a várt módon a ponttöltés energiája szingulárissá válik!

II. TÖLTÉSELOSZLÁS POTENCIÁLBÓL

Egy töltéskonfiguráció potenciálja
$$\Phi(\mathbf{r}) = A \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \tag{11}$$
ahol A és λ konstansok.

- Számolja ki az elektromos teret ($\mathbf{E}(\mathbf{r})$), a töltéseloszlást ($\rho(\mathbf{r})$), és a teljes töltést (Q)!
  Megoldás:
  Az elektromos teret a szokásos összefüggéseből számítjuk ki, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$
$$\mathbf{E}(r) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{A\exp(-\lambda r)}{r}\left(\frac{1}{r} + \lambda\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{12}$$
  A töltés eloszlás esetében alkalmazzuk a:
$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E(r)\right)}{\partial r} = \frac{A}{r^2}\frac{\partial\left[\exp(-\lambda r)(1+\lambda r)\right]}{\partial r} = \frac{A}{r^2}\exp(-\lambda r)\left[-\lambda - \lambda^2 r + \lambda\right] = -\frac{A\lambda^2\exp(-\lambda r)}{r} \equiv \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{13}$$
  Figyelem! Ha sorbafejtjük a töltéseloszlást, az első tag $\frac{A}{r}$, ami a ponttöltésnek felel meg, amirő azonban láthattuk korábban, hogy a töltése egy Dirac-deltával írható le és aminek a Laplace-ja hibásan 0- át ad.

- Ellenőrizze és egészítse ki a kapott töltéseloszlást az integrális Gauss-tétel segítségével!
Megoldás:
Vegyünk egy tetszőleges R sugarú gömböt és alkalmazzuk a Gauss-tételt, kihasználva a gömbi szimmetriáját az elektromos térnek:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi A\exp(-\lambda R)\,[1+\lambda R] \tag{14}$$

Most számoljuk ki az előző feladatban kapott töltéselsoszlás általi teljes töltést egy R sugarú gömbön belül:

$$Q(R) = -\int \mathrm{d}^3\mathbf{r} A\varepsilon_0\lambda^2\frac{\exp(-\lambda r)}{r} = -4\pi\varepsilon_0 A\lambda^2\int_0^R \mathrm{d}r\, r\exp(-\lambda r) = 4\pi\varepsilon_0 A\,[(\lambda R+1)\exp(-\lambda R)-1] \tag{15}$$

A két eredmény összehasoníltásából látszik, hogy az össztöltés kiszámításánál a Gauss-tétel esetén kaptunk egy extra $Q = +4\pi\varepsilon_0 A$ járulékot, ami egy origóbeli ponttöltének felel meg, vagyis a teljes töltés eloszlás a következő:

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_0 A\lambda^2\exp(-\lambda r)}{r} + 4\pi\varepsilon_0 A\delta(\mathbf{r}) \equiv \rho_{\text{folyt}} + \rho_{\text{szing}} \tag{16}$$

- Számolja ki a rendszer energiáját és vizsgálja meg a rendszer stabilitását!
Megoldás:
A rendszer energiáját egyszerűen kiszámolhatjuk, ha szétválasztjuk a potenciált is a folytonos és a szingulráis tagokból eredő járulékokra, $\Phi = \frac{A}{r}(\exp(-\lambda r)-1) + \frac{A}{r} \equiv \Phi_{\text{folyt}} + \Phi_{\text{szing}}$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{folyt}}\rho_{\text{folyt}} + \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{folyt}}\rho_{\text{szing}} + \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{szing}}\rho_{\text{folyt}} \\ &= -2\pi\int_0^\infty A\exp(-\lambda r)\varepsilon_0 A\lambda^2\exp(-\lambda r)\mathrm{d}r + 4\pi\varepsilon_0 A\left[\Phi(\mathbf{r}) - \frac{A}{r}\right]\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = -\pi\varepsilon_0 A^2\lambda - 4\pi\varepsilon_0 A^2\lambda = -5\pi\varepsilon_0 A^2\lambda \end{aligned} \tag{17}$$

Ahol az első tag írja le a teljes potenciálban lévő folytonos közeg energiáját, míg a második tag egyszerűen a folytonos közeg potenciál ponttötlésre gyakorolt hatását írja le, ahol is a $\delta(\mathbf{r})$ hatása miatt mindenhol $r = 0$-át kellett tekintetnünk a folytonos potenciálban, amiből csak a legelső konstans értékű tag maradt meg, azaz $\frac{A}{r}(\exp(-\lambda r)-1) = -A\lambda + A\lambda^2 r + \ldots$.

III. TÖLTÉS VEZETŐN BELÜLI ÜREGBEN

Adott egy semleges, R sugarú fémgömb, melyben egy üreg található. Az üreg nem tartalmazza a gömb középpontját, viszont tartalmaz egy q nagyságú töltést az origótól a távolságra. Mi az elektromos tér a gömbön kívül? Miért nem függ az üreg alakjától vagy elhelyezkedésétől?
Megoldás:
A gömbön kívüli töltés meghatározásához használjuk ki, hogy tudjuk a fémek felületén érvényes határfeltételeket, azaz annak érdekében, hogy a fémen belül sztatikus állapot alakuljon ki a szabadon mozogható elektronok úgy rendeződnek, hogy a fém felületén az elektromos térnek csak normális komponense legyen, ami rögtön implikája, hogy egy gömb esetén ez a normális komponens mindenhol ugyanakkora. Ha nem ugyanakkora lenne, az rögtön implikálna nem zérus tangenciális komponenst is! Ezt összevetve a Gauss tétellel, illetve azzal, hogy a fémgömb nem vesz fel többlet töltést a földből, egyszerűen visszakapjuk egy q nagyságú ponttöltés terét:

$$\mathbf{E}(r > R) = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{18}$$

Ez nem függ az üreg alakjától, mivel a fémes anyag határfeltétele alapján mind az üreg falánál, mind a gömb külső falánál normális irányúnak kell lennie minden pontban a térerősségnek!

IV. ELEKTROMOS TÉR → TÖLTÉSSŰRŰSÉG

Adott a következő elektromos tér:

$$E_x = ax, E_y = 0, E_z = 0, \tag{19}$$

ahol a egy konstans. Mi a $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűség? Mi a magyarázata annak, hogy az elektromos tér anizotróp, de a töltéssűrűség homogén?
Megoldás:
Ki kell számolnunk a töltéssűrűséghez, a "megszokott módon" a divergenciát:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = a \to \rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 a \tag{20}$$

Vagyis egy homogén töltéssűrűséget kaptunk, ami mégis egy anizotróp elektromos teret kelt. Ezt a következőképpen érthetjük meg:
Mivel eygy differenciálegyenlet megoldása önmagában nem egyértelmű, szükséges hozzá specifikálni a határfeltételeket is, ezt legtöbbször a Poisson-egyenelt esetében tesszük meg, $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Esetünkben a potenciál $\Phi = -a\frac{x^2}{2} + \Phi_0$, de akár milyen más kombinációjú potenciál is ugyanezt a homogén eloszlást adná, $-\frac{ay^2}{2}$, $-\frac{az^2}{2}$, $\frac{ay^2}{4} + -\frac{3ax^2}{2}$, $-\frac{a_y x^2}{2} - \frac{a_y y^2}{2} - \frac{a_z z^2}{2}, a_x + a_y + a_z = a$,stb.... Azt, hogy melyik (konstans erejéig) egyértelmű potenciált kell alkalmaznunk a határfeltétel szabja meg, például a fent látott eredményt adja egy nagyon egyszerű határfeltétel, $\Phi(x=0,y,z)=0$, aminek következtében az y^2 és z^2-es tagok csak 0 együtthatóval mehetnek.

V. DIRAC δ-FÜGGVÉNY ELŐÁLLÍTÁSA

A Dirac δ-függvény előállítható reguláris $D(x)$ függvények határértékeként:

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} D_\alpha(x), \tag{21}$$

ahol

$$D_\alpha(x) = \alpha D(\alpha x), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} D(x)dx = 1.$$

1. Mutassa meg, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_\alpha(x)dx = 1, \quad \forall\alpha \in (0,\infty)\,. \tag{22}$$

   Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, D_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \alpha D(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}(\alpha x)\, D(\alpha x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, D(y) \equiv 1 \tag{23}$$

2. Mutassa meg a határértéket felhasználva, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \tag{24}$$

   Megoldás:
   Vezessük be új változónak az $y = \alpha x$ változót, mielőtt még vesszük az $\alpha \to \infty$ határértéket:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \alpha f(x)\, D(\alpha x) = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, f(y/\alpha)\, D(y) \tag{25}$$

   Most vigyük be a határértéket az integrálba, ekkor $\lim_{\alpha\to\infty} f(y/\alpha) = f(0)\ \forall y$, vagyis kihozható az integrálból:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \lim_{\alpha\to\infty} f(y/\alpha)\, D(y) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y D(y) = f(0)\,. \tag{26}$$

3. Igazolja, hogy a következő függvények az $\alpha \to \infty$ limeszben úgy viselkednek mint a Dirac δ-függvény.

$$D_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2\alpha} \\ 0, & x > \frac{1}{2\alpha} \end{cases} \tag{27}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\alpha^2 x^2\right) \tag{28}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \tag{29}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(ixt) dt. \tag{30}$$

Megoldás:
Látható, hogy az első függvény integrálja 1-et ad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x D_\alpha(x) = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \mathrm{d}x \alpha = 1 \tag{31}$$

Illetve $D_\alpha(x) = \alpha \left[\Theta(\alpha x + 1/2) - \Theta(\alpha x - 1/2)\right]$, ami igazolja az állítást!
Látható, hogy ha $D(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$, aminek 1 az integrálja, továbbá látható, hogy

$$D_\alpha(x) = \alpha \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{\sqrt{\pi}}, \tag{32}$$

ami igazolja az állítást!
Vegyük a $D(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ kifejezést, aminek 1 az integrálja, illetve ekkor $\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \equiv \alpha D(\alpha x) \equiv D_\alpha(x)$! Illetve tudjuk, hogy $(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x}$, illetve $(\pm\infty) = \pm\pi/2$, ahonnan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} = 1. \tag{33}$$

Tudvalevő, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{\pi x} = 1 \tag{34}$$

Ekkor $D_\alpha(x) = \alpha D(\alpha x) = \alpha \frac{\sin(\alpha x)}{\pi \alpha x} = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}$!

VI. DIRAC δ-FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI

A Dirac δ-függvényre igazak a következő azonosság:

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), \tag{35}$$

ahol x_n az $f(x)$ függvény n. gyöke.

1. Határozza meg a $\delta(x^2 - a^2)$ kifejezést értékét!
Megoldás:
A belső függvény két zérushelye, $x_\pm = \pm a$, ahonnan a következő adódik:

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2a} \left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] \tag{36}$$

2. Az előző eredmény alapján mutassa meg, hogy $|x|\,\delta(x^2) = \delta(x)$.
Megoldás:
Rendezzük át az előző feladatbeli eredményt:

$$2a\delta\bigl(x^2 - a^2\bigr) = 2x\delta\bigl(x^2 - a^2\bigr) = \delta(x-a) + \delta(x+a) \tag{37}$$

ahol kihasználtuk, hogy $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$, illetve hogy $f(x)\,\delta(g(x)) = f(x_i)\,\delta(g(x))$, $g(x_i) = 0$, ha g-nek csak egy zérushelye van! Ekkor $2a\delta\bigl(x^2 - a^2\bigr) = 2|x|\,\delta\bigl(x^2 - a^2\bigr) = \delta(x-a) + \delta(x+a)$, ez már tetszőleges a-re igaz, $a = 0$-ra is!