Példák: Coulomb törvény, elektromos tér, potenciál

I. PONTTÖLTÉSEK TERE

1. Két egyenlő nagyságú és ellentétes előjelű (q és $-q$) ponttöltés egymástól d távolságra van.

   (a) Mekkora a potenciál és a térerősség a hely függvényében, ha az origót a két ponttöltést összekötő szakasz felezőjének választjuk?
   Megoldás:
   Vegyük azt az általános szituációt, amikor a $\pm q$ ponttöltések az z tengely mentén a $\mathbf{r}_\pm \equiv \pm d/2\,\hat{\mathbf{z}}$ pozícióban helyezkednek el. Ekkor a tér egy tetszőleges $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ pontjában definíció szerint a $\pm q$ töltések által keltett potenciálok külön-külön a következőképpen írhatóak le:

$$\Phi_\pm(\mathbf{r}) = k\frac{\pm q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\pm|} = k\frac{\pm q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2}}, \tag{1}$$

   ahol $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Most alkalmazva a szuperpozíció elvét, azaz a két töltés által keltett *együttes potenciál* éppen a két potenciál összegével egyenlő a tér minden pontjában, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_+(\mathbf{r}) + \Phi_-(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}}\right) \tag{2}$$

   Hasonló módon a tér egy adott pontjában az elektromos térerősség is két részecske által keltet térerősségek *vektoros összege*, amiket egyenként ki tudunk számítani a két potenciálból:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi_\pm(\mathbf{r}) = k\frac{\pm q}{r_\pm^2} = k\frac{\pm q}{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

   (b) Milyen lesz az elektromos mező, ha a két töltés nagysága és távolsága egyszerre végtelenhez tart úgy, hogy közben $\eta = \dfrac{q}{4\pi d^2}$ állandó marad? (Segítség: egyszerűbb a potenciált meghatározni, és utána a térerősséget ebből kiszámítani!)
   Megoldás:
   Először meghatározzuk a potenciált, az útmutatásnak megfelelően, ehhez először emeljünk ki a nevezőből d-vel, ami által a következő vezetőrendbel sorfejtést végezhetjük el:

$$\begin{aligned} &\frac{kq}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{(x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d - 1/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d + 1/2)^2}}\right) \\ &= kq/d\left(\frac{1}{\sqrt{1/4 - z/d}} - \frac{1}{\sqrt{1/4 + z/d}}\right) + \mathrm{o}\left\{1/d^2\right\} = kq/d(2 + 4z/d - (2 - 4z/d)) + \mathrm{o}\big(1/d^2\big) = 8kqz/d^2 + \mathrm{o}\big(1/d^2\big)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

   Tehát a vezetőrendbeli sorfejtés során minden a két nevezőből adódó $1/d^2$ vagy magasabb rendű tagot elhagytunk. Innen már nagyon könnyű meghatároznunk az elektromos térerősséget:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{kq}{d^2}\hat{\mathbf{z}} + \mathrm{o}\big(1/d^2\big) = -8\frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

   Értelmezzük ezt a kifejezést, két végtelen nagy töltés végtelen messzire egymástól olyan elektromos tert kel az origótól ”nem túl messzi pontokban”, $x_i/d \ll 1$, ami vezetőrendben homogén z irányúnak érződik!

II. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK EXPLICIT INTEGRÁLÁSSAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét és potenciálját a megadott pontokban! Ellenőrizze az $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$ összefüggést!

1. Adott egy L hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálca egyik felezőpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg L$ esetet!
Megoldás:
Legyen a pálca felső és alsó végpontja z tengely mentén a $\pm L/2$ pontokban. Ekkor válasszunk a z' pontban egy dz infinitezimális hosszúságú pontot, $\mathrm{d}q = \mathrm{d}z\lambda$ infinitezimális nagyságú töltéssel, illetve az ehhez tartozó $\mathrm{d}\Phi(z') = k\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{z^2+(z')^2}}$. Most ismét használva a szuperpozíció elvét, azaz a teljes pálca potenciálja egyszerűen csak az infinitezimális járulékok összege, azaz integrálja:
$$\Phi(z) = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z' k\lambda \frac{1}{\sqrt{z^2+(z')^2}} = 2k\lambda \mathrm{arsh}\left(\frac{L}{2z}\right). \tag{6}$$
Hasonlóan járunk el az elektromos térerősség esetében is, azaz kiszámítjuk először egy z$'$ infinitezimális hosszűságú darabra a $\mathrm{d}E(z) = k\lambda\frac{\mathrm{d}z'}{z^2+(z')^2}$, aminek a vetülete a pálcára merőleges irányra, amit most z-vel jelölünk a feladat konvenciója alapján, $\mathrm{d}E_z(z) = \mathrm{d}E(z)\cos\varphi = \frac{k\lambda \mathrm{d}z'}{z^2+(z')^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+(z')^2}}$, majd alklamazva ismét a szuperpozíció elvét a következőt kapjuk az felintágrálás után:
$$k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z' \frac{z}{\left(z^2+(z')^2\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{z}\int_{-L/2z}^{L/2z} \mathrm{d}z' \frac{1}{\left(1+(z')^2\right)^{3/2}}. \tag{7}$$
Ahol áttértünk a $z' \to z'/z$ új változóra, most bevezetve új változónak az $\tan x = z'$-ot, $\mathrm{d}z' = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$:
$$\frac{k\lambda}{z}\int_{-\mathrm{arctg(L/2z)}}^{\mathrm{arctg(L/2z)}} \mathrm{d}x \frac{1}{\cos^2 x}\cos^3 x = \frac{k\lambda}{z}\int_{-\mathrm{arctg(L/2z)}}^{\mathrm{arctg(L/2z)}} \mathrm{d}x \cos x = \frac{2k\lambda}{z}\sin(L/2z) = \frac{2k\lambda}{z}\frac{L/2z}{\sqrt{1+(L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}}, \tag{8}$$
ahol felhasznátluk, hogy $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$. Látható, hogy ez éppen a negatív z szerinti deriváltja a fentebb kiszámított potenciálnak, hiszen $-\partial_z\left(2k\lambda\mathrm{arsh}\left(\frac{L}{2z}\right)\right) = \frac{2k\lambda}{2}\frac{L/z^2}{\sqrt{1+(L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{1+(2z/L)^2}}$.
Most vizsgáljuk meg a $z \gg L$ határesetet, ekkor fejtsük sorba a potenciálban lévő kifejezetést, $\mathrm{arsh}(L/2z) = L/2z + \mathrm{o}\Big(\left(L/z\right)^3\Big)$, illetve hasonló módon a térerősségben lévő kifejezést is, $\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1+(2z/L)^2}} = \frac{L}{z^2}\frac{1}{\sqrt{1+(2L/z)^2}} = \frac{L}{z^2} + \mathrm{o}\left(L^3/z^4\right)$
$$\Phi(z) = \frac{k\lambda L}{z} + \mathrm{o}\Big(\left(L/z\right)^3\Big) \tag{9}$$
$$E_z(z) = \frac{k\lambda L}{z^2} + \mathrm{o}\left(L^3/z^4\right) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{k\lambda L}{z^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{10}$$
Ami megfelel a várakozásainknak, hiszen egyrészt vezetőrendben is teljesül, hogy $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$, illetve egy ponttöltés tereit kaptuk vissza!

2. Adott egy R sugarú gyűrű, λ töltéssűrűséggel. A pont legyen a gyűrű középpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$ esetet!
Megoldás:
Paraméterezzük az infinitezimális kerületi darabokat a dθ infinitezimális szöggel, amihez a körgyűrű darab $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\theta R$, a töltés $\mathrm{d}q = \lambda R\mathrm{d}\theta$. A kör középpontjától való távolság állandó, $\sqrt{R^2+z^2}$, vagyis az infinitezimális potenciál járulékok mind szögfüggetlenek, $\mathrm{d}\Phi = k\lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}$. A teljes potenciál ismét ezek összege a szuperpozícó elvének megfelelően:
$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta k\lambda \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2\pi k\lambda}{\sqrt{z^2+R^2}}. \tag{11}$$

Hasonlóan iszámítható a térerősség is, mivel egy infinitezimális darab térerősségének nagysága, $\mathrm{d}E(z) = k\lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{R^2+z^2}$, továbbá az (x, y) síkon való szimmetria miatt $E_{x,y} = 0$, illetve $\mathrm{d}E_z$ a $\mathrm{d}E(z)$ vetülete a z tengelyre, $\mathrm{d}E_z = \cos\varphi\mathrm{d}E(z) = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\mathrm{d}E = \frac{k\lambda\mathrm{d}\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{2z\pi k\lambda}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2z\pi k\lambda}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{12}$$

Látható, hogy $-\partial_z\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, ami igazolja az $E_z(z) - \partial_z\Phi(z)$ összefüggést.
Megvizsgálva a $z \gg R$ határesetet először a potenciál esetén a követező sorfejtés kell végrehajtanunk:

$$\frac{2\pi k\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} = 2\pi k\lambda\frac{1}{z}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \mathrm{o}\big(z^4/R^4\big)\right) = \frac{2\pi k\lambda}{z} + \mathrm{o}\big(R^2/z^3\big) \tag{13}$$

ahol az utolsó lépésben csak a legalacsonyabb rendű $1/z$-s tagot hagytuk meg. Innen egyszerűen meg lehet adni a térerősséget, $E_z = -\partial_z\Phi(z) = \frac{2\pi k\lambda}{z^2}$. Vagyis "nagyon messziről" nézve a körgyűrű ponttöltésnek látszódik, ahol a megjelenő "effektív ponttöltés" a kör teljes, $q = 2\pi k\lambda$ töltése.

3. Adott egy R sugarú korong, amelyen σ mennyiségű homogén töltéssűrűség helyezkedik el. A pont legyen a korong közeppontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$, és az $R \gg z$ eseteket!
Megoldás:
Mivel tudjuk, hogy egy r sugarú homogén töltéseloszlűsú kör potenciálja, illetve elektromos tere, $\mathrm{d}q = 2\pi r\mathrm{d}r\sigma$ össztöltés esetén:

$$\mathrm{d}\Phi(z) = \frac{2\pi kr\sigma\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+z^2}} \tag{14}$$

$$\mathrm{d}E_z(z) = \frac{2\pi kr\sigma z\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{15}$$

Felösszegezve minden ilyen $\mathrm{d}r$ vastagságú körívre 0-tól R-ig a következő eredmények adódnak:

$$\Phi(z) = \int_0^R \mathrm{d}r\frac{2\pi k\sigma r}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k\sigma\Big(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\Big)\,,$$

$$E_z(z) = \int_0^R \mathrm{d}r\frac{2\pi kr\sigma}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 2z\pi k\sigma\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(z)\,.$$

Rögtön látható, hogy teljesül a $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$, mivel $-\partial_z|z| = -\mathrm{sgn}(z)$, illetve $-\partial_z\sqrt{R^2+z^2} = -\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$.
Most vizsgáljuk meg a $R \gg z$ határesetben $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = R + \frac{z^2}{2R} - |z| + \mathrm{o}\big(z^3/R^2\big) = R\Big(1 - \frac{|z|}{R} + \mathrm{o}\big(z^2/R^2\big)\Big)$, ahol az utolsó lépésben, kiemelve R-el a zárójelen belül elhagyhattunk minden z/R-nél magasabb rendű tagot, vagyis az adott határesetben a potenciál, illetve a megfelelő deriválás utána térerősség, $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$:

$$\Phi(z) \approx 2\pi kR\sigma\left(1 - \frac{|z|}{R}\right) \tag{16}$$

$$E_z(z) \approx 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{17}$$

Az eredmény hűen tükrözi azt amit vártunk, a körlap méreténél jóval közelebb a körlaphoz a tér vezetőrendben visszaadja a kondenzátoroknál tanult kifejezést!
Most az ellenkező határeset, $z \gg R$: $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = \frac{R^2}{2|z|} + \mathrm{o}\big(R^2/z^3\big)$, innen egyszerűen ismét a potenciál és a belőle származtatott elektromos tér:

$$\Phi(z) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{|z|}$$

$$E_z(z) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{z^2} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{z^2}\hat{\mathbf{z}}$$

Ami ismét nem másnak felel meg mint annak az esetnek, amikor nagyon messziről tekintve egy töltés elrendezést, az vezetőrendben ponttöltésnek látszódik, a rendszerben lévő össztöltéssel!

III. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK A GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét, valamint potenciálját a megadott pontokban!

1. Adott egy végtelen hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálcától z távolságra. Vesse össze az eredményt a véges pálcára talált eredménnyel, ha a pálca hossza a végtelenbe tart!
Megoldás:
Vegyünk egy henger felületet egy tetszőleges z távolságnál a z' tengellyel párhuzamosan, amely a Gauss-tételben megjelenő felületként fog szolgálni, ekkor a végtelen hosszú vonalat körbe ölelő hengerfelületre a Gauss-tétel:
$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{18}$$
Esetünkben egy hengereszimmetrikus teret integrálunk egy fix r sugarú hengerre: $\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\, \mathbf{E}(z) = 2\pi z \int_0^L \mathrm{d}z' E(z) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$:
$$\mathbf{E}(r) = E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{2k\lambda}{z}\hat{\mathbf{r}} \tag{19}$$
Ahol a vonalvezető végtelen hossza miatt a rendszer transzlációs szimmetriával bír, vagyis tetszőleges véges L darabon érvényesnek kell lennie a Gauss-tételnek!
A véges méretű pálca esetén a következő erdményt kaptuk, $E_z(z) = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}}$, most sorbafejtve vezetőrendig:
$$E_z(z) \approx \frac{2k\lambda}{z} \tag{20}$$
mivel legelső rendben $\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}} = 1 + \mathrm{o}\Big((z/L)^2\Big)$.

2. Adott egy végtelen felület σ töltéssűrűséggel. A pont legyen a felülettől z távolságra. Vesse össze az eredményt a véges sugarú korongra talált eredménnyel, ha a korong sugara a végtelenbe tart!
Megoldás:
Ismét alkalmazzuk a Gauss-tételt, ehhez vegyük a végtelen felülettől $\pm z$ távolságra lévő végtelen felületeket, a rendszer 2 dimenziós transzlációs szimmetriája miatt ismét elegendő tekintenünk egy A területű négyzetet a Gauss-tételhez, illetve ekkor az elektromos tér is csak a z irányú lehet és csak z-től függhet:
$$\oint_A \mathrm{d}^2\mathbf{f}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2AE_z(z) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{21}$$
ahol az $\mathrm{sgn}(z)$ eredete, hogy a Gauss-tétel felírása előtt már ilyen irányúnak tételeztük fe la teret szimmetriaia megfontolásokból. Összevetve a körlapra kapott eredményünkkel, ahol a véges sugár esetén $E_z(z) = 2\pi k\sigma\Big(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big)$, ami vezetőrendben, ha $R \gg z$, $\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2}} = \mathrm{sgn}(z) + \mathrm{o}(z/R)$, vagyis a $z/R \ll 1$ limeszben éppen visszakapjuk, hogy $E_z(z) = 2\pi k\sigma \mathrm{sgn}(z)$.

3. Adott egy R sugarú gömb amelynek térfogati töltéssűrűsége ρ, felületi töltéssűrűsége σ. Számolja ki a gömb elektromos terét valamint potenciálját az $r < R$ és $r > R$ régiókban a Gauss tétel segítségével! Igazolja, hogy a felületi töltéssűrűség az elektromos térerősségben $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ nagyságú ugrást okoz!
Megoldás:
Vegyünk egy tetszőlegs $r < R$ sugarú gömböt amiben összesen $Q(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ töltés helyezkedik el, ekkor az r sugarú gömbfelszínt tekintve a Gauss-tételben, az elektromos tér gömbszimmetrikussága miatt:
$$\oint \mathrm{d}^2\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \to \mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} = \frac{kQr}{R^3}\hat{\mathbf{r}} \tag{22}$$
Most tekintsük a gömbön kívüli teret, amikor az $r > R$ sugarú gömb magában foglalja a gömb teljes töltését, $Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$, illetve amihez még hozzá kell vennünk a felületen lévő töltéseket is, $Q \to Q + 4\pi R^2\sigma$ ekkor hasonló megfontolások alapján a követkző Gauss tételt írhatjuk fel:
$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r E_r(r) = \frac{Q + 4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(r) = \frac{k\big(Q + 4\pi R^2\sigma\big)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{23}$$
Most megmondhatjuk, mekkora a változása az elektromos térnek a felületen lévő töltéseknek köszönhetően, $\Delta E_r \equiv E_r(R+0) - E_r(R-0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

IV. GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSA - INHOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁSOK

(Megoldást ld. a weblapon.)

Számolja ki az elektromos teret a következő esetekben. Készítsen vázlatot is róla a releváns távolság függvényében.

1. $\rho(r) = \alpha r$ inhomogén töltéssűrűségű, R sugarú gömb esetében, az origótól r távolságra.
   Megoldás:
   Vegyünk ismét egy tetszőleges r sugarú gömbfelületet a Gauss-tételhez, ekkro a tér gömbszimmetrikussága miatt $\oint \mathrm{d}^2\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}(r) = 4\pi r E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$, aho la töltést explicit térfogati integrálással tudjuk meghatározni:
   $$Q(r) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r'(r')^2\,\alpha r' = 4\pi\alpha\frac{r^4}{4} = \alpha\pi r^4, \tag{24}$$
   ahonnan a tér $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha r^3}{4\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$.

2. Egy bizonyos régióban az elektromos tér $\mathbf{E} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$ (gömbkoordinátákban), ahol k egy konstans.

   (a) Számolja a ki teljes töltést, amelyet egy R sugarú origó középpontú gömb tartalmaz! **Megoldás:**
   Alkalmazzuk visszfele a Gauss-tételt, vagyis hasonlóan eljárva mint a korábbi példákban egy R sugarú gömbre vett felületi integrál értéke:
   $$4\pi R^2 E_r(R) = 4\pi k R^5 = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0} \to Q(R) = 4\pi k R^5 \varepsilon_0. \tag{25}$$

   (b) Számolja ki a töltéseloszlást!
   Megoldás:
   Definíció szerint $\mathrm{d}Q(R) = \rho(R)\,4\pi R^2 \mathrm{d}R$, ahol
   $$\mathrm{d}Q(R) = Q(R+\mathrm{d}R) - Q(R) = \frac{\mathrm{d}Q(R)}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R = 20\pi k\varepsilon_0 R^4 \mathrm{d}R = \rho(R)\,4\pi R^2\mathrm{d}R \to \rho(R) = 5\varepsilon_0 k R^2. \tag{26}$$

V. ELEKTROMOS KETTŐSRÉTEG

(Nem került sorra.)

1. Adott két R sugarú körlap, az egyiken $+\sigma$, a másikon $-\sigma$ egyenletes töltéssűrűséggel, úgy, hogy össztöltésük $\pm Q$. A két körlap egymással párhuzamosan helyezkedik el az xy síkkal párhuzamosan, középpontjuk a z tengelyen a $\pm\delta/2$ pontokban van.

   (a) Írjuk fel a két körlap eredő elektromos térerősségét a z tengely mentén!
   Megoldás:
   Tudjuk a **II**/3-as feladatból, hogy ekkor a két tér ellentétes irányú $E_z^{\pm}(z) = \pm 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}}\right)$,
   ahonnan a teljes tér:
   $$E_z(z) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z+\delta/2) - \mathrm{sgn}(z-\delta/2) + \frac{z-\delta/2}{\sqrt{R^2+(z-\delta/2)^2}} - \frac{z+\delta/2}{\sqrt{R^2+(z+\delta/2)^2}}\right) \tag{27}$$

   (b) Vegyük azt a határesetet, amikor $\delta \to 0$ úgy, hogy $\sigma\delta = \tau$ állandó marad (elektromos kettősréteg τ felületi dipólsűrűséggel)! Mennyi az elektromos térerősség a z tengely pontjaiban?
   Megoldás:
   Most fejtsük sorba a $\sigma\frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}}$ kifejezést, ahol $\sigma\to\infty$, $\delta\to 0$, úgy hogy $\sigma\delta = $ áll.:
   $$\begin{aligned}\sigma\frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}} &= \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z\mp\delta/2}{R}\right)^2}} \approx \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2 \mp z\delta/R^2}} \\ &\approx \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R\sqrt{1+(z/R)^2}}\left(1 \pm \frac{z\delta}{2R^2\left(1+(z/R)^2\right)}\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Most véve a két tag különbségét, látható, hogy csak a $\sim \mp\frac{\sigma\delta/2}{R\sqrt{1+(z/R)^2}}$ és a $\sim \pm\frac{z^2\sigma\delta}{2R^3\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}$ tagok fognak megmaradni:

$$E_z(z) = 2\pi k\frac{\sigma\delta}{R^3\sqrt{1+(z/R)^2}}\left(\frac{z^2}{1+(z/R)^2} - R^2\right) = -\frac{2\pi\tau}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}} \tag{29}$$

Ezt követően már csak a kettő sgn függvényt kell megfelelően sorbafejtenünk, $2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z\pm\delta/2) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z) \pm 2\pi k\tau\delta(z)$, amiből az első tag kiesik a $\pm$-os tagok összegzése után, tehát végeredményben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\tau\left(\delta(z) - \frac{1}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}\right) \tag{30}$$

(c) Számolja ki az elektromos potenciált a $z > 0$ és a $z < 0$ félegyenesek mentén! Mennyi a kettős réteg két oldala között a potenciálkülönbség? Mi ennek a szemléletes fizikai magyarázata?
Megoldás:
Most számítsuk ki ismét hasonló sorfejtések segítsévéel a portenciálkülönbséget a két réteg lözött, ahol a potenciál $\Phi_\pm(z) = \pm 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2} - |z\mp\delta/2|\right)$. Sorba fejtve az első tagot, először a gyök alatt vezetőrendig δ szerint, $\sqrt{R^2+z^2\mp z\delta} \approx \sqrt{R^2+z^2}\left(1\mp\frac{z\delta}{2R^2+z^2}\right) = \sqrt{R^2+z^2} \mp \frac{z\delta}{2\sqrt{R^2+z^2}}$, amiből a két tag különbségét vége csak a második fog megmaradni, $\Phi_+(z)+\Phi_-(z) \to \frac{z\delta}{\sqrt{R^23+z^2}}$. Most végezzük el a vezetőrendbeli sorfejtését a $|z\mp\delta/2|$ tagnak:

$$|z\mp\delta/2| = |z| \mp \delta/2\,\mathrm{sgn}(z) \tag{31}$$

amiből a két tag összeadása után csak a $\delta/2\,\mathrm{sgn}(z)$ marad meg, összességében a potenciálra a következő kifejezést adva:

$$\Phi(z) = 2\pi\tau\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{\mathrm{sgn}(z)}{2}\right), \tag{32}$$

Láthtó, hogy telejsül ismét a $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$ összefüggés, hiszen $\partial_z\mathrm{sgn}(z) = 2\delta(z)$, ileltve $-\partial_z\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{-1}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}$.