Példák: Coulomb törvény, elektromos tér, potenciál

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. Coulomb törvény: ponttölés elektromos tere az $\mathbf{r}$ pontban, ha a töltés az $\mathbf{r}'$ pontban található.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = kq\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{1}$$

Alkalamzás: integrális alak folytonos töltéselrendezések esetén

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{2}$$

2. Maxwell I. (differenciális):

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})\,. \tag{3}$$

Töltés jelenlétében

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})\,. \tag{4}$$

3. Gauss törvény (integrális Maxwell I.):

$$\oint_{\partial V}\mathbf{d}f^2\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathbf{d}r^3\,\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{5}$$

I. PONTTÖLTÉSEK TERE

1. Két egyenlő nagyságú és ellentétes előjelű (q és $-q$) ponttöltés egymástól d távolságra van.

(a) Mekkora a potenciál és a térerősség a hely függvényében, ha az origót a két ponttöltést összekötő szakasz felezőjének választjuk?

Megoldás:
Vegyük azt az általános szituációt, amikor a $\pm q$ ponttöltések a z tengely mentén az $\mathbf{r}_\pm \equiv \pm d/2\,\hat{\mathbf{z}}$ pozícióban helyezkednek el. Ekkor a tér egy tetszőleges $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ pontjában definíció szerint a $\pm q$ töltések által keltett potenciálok külön-külön a következőképpen írhatóak le:

$$\Phi_\pm(\mathbf{r}) = k\frac{\pm q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\pm|} = k\frac{\pm q}{\sqrt{x^2+y^2+(z\mp d/2)^2}}\,, \tag{6}$$

ahol $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Most alkalmazva a szuperpozíció elvét, azaz a két töltés által keltett *együttes potenciál* éppen a két potenciál összegével egyenlő a tér minden pontjában, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_+(\mathbf{r}) + \Phi_-(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right)\,. \tag{7}$$

Hasonló módon a tér egy adott pontjában az elektromos térerősség is a két részecske által keltett térerősségek *vektoros összege*, amiket egyenként ki tudunk számítani a két potenciálból:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi_\pm(\mathbf{r}) = \pm kq\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_\pm}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\pm|^3} = \pm kq\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_\pm}{\left(x^2+y^2+(z\mp d/2)^2\right)^{3/2}}\,,\\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_+}{\left(x^2+y^2+(z-d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_-}{\left(x^2+y^2+(z+d/2)^2\right)^{3/2}}\right)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

(b) Milyen lesz az elektromos mező, ha a két töltés nagysága és távolsága egyszerre végtelenhez tart úgy, hogy közben $\eta = \dfrac{q}{4\pi d^2}$ állandó marad? (Segítség: egyszerűbb a potenciált meghatározni, és utána a térerősséget ebből kiszámítani!)

Megoldás:
Először meghatározzuk a potenciált, az útmutatásnak megfelelően, ehhez először emeljünk ki a nevezőből d-t, ami által a következő vezetőrendbel sorfejtést végezhetjük el:

$$\frac{kq}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{(x/d)^2+(y/d)^2+(z/d-1/2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x/d)^2+(y/d)^2+(z/d+1/2)^2}}\right)$$
$$=\frac{kq}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1/4-z/d}}-\frac{1}{\sqrt{1/4+z/d}}\right)+\mathrm{o}\left\{1/d^2\right\}=\frac{kq}{d}(2+4z/d-(2-4z/d))+\mathrm{o}\big(1/d^2\big)=\frac{8kqz}{d^2}+\mathrm{o}\big(1/d^2\big)\ . \tag{9}$$

Tehát

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{8\eta z}{\varepsilon_0}\,. \tag{10}$$

Ahol a vezetőrendbeli sorfejtés során minden a két nevezőből adódó $1/d^2$ vagy magasabb rendű tagot elhagytunk. Innen már nagyon könnyű meghatároznunk az elektromos térerősséget:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\Phi(\mathbf{r})=-\frac{kq}{d^2}\hat{\mathbf{z}}+\mathrm{o}\big(1/d^2\big)=-8\frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{11}$$

Értelmezzük ezt a kifejezést: két végtelen nagy töltés végtelen messzire egymástól olyan elektromos tert kel az origótól "nem túl messzi pontokban", $x_i/d \ll 1$, ami vezetőrendben homogén z irányúnak érződik, egy effektív $E=\frac{8\eta}{\varepsilon_0}$!

II. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK EXPLICIT INTEGRÁLÁSSAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét és potenciálját a megadott pontokban! Ellenőrizze az $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\Phi$ összefüggést!

1. Adott egy L hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálca egyik felezőpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg L$ esetet!

Megoldás:
Legyen a pálca felső és alsó végpontja z tengely mentén a $\pm L/2$ pontokban. Ekkor válasszunk a z' pontban egy $\mathrm{d}z$ infinitezimális hosszúságú pontot, $\mathrm{d}q=\mathrm{d}z\lambda$ infinitezimális nagyságú töltéssel, illetve az ehhez tartozó $\mathrm{d}\Phi(z')=k\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{z^2+(z')^2}}$ szintén infinitezimális nagyságú potenciállal. Most ismét használva a szuperpozíció elvét, azaz a teljes pálca potenciálja egyszerűen csak az infinitezimális járulékok összege, azaz integrálja:

$$\Phi(z)=\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z' k\lambda\frac{1}{\sqrt{z^2+(z')^2}}=2k\lambda\mathrm{arsh}\left(\frac{L}{2z}\right). \tag{12}$$

Hasonlóan járunk el az elektromos térerősség esetében is, azaz kiszámítjuk először egy $\mathrm{d}z'$ infinitezimális hosszúságú darabra a $\mathrm{d}E(z)=k\lambda\frac{\mathrm{d}z'}{z^2+(z')^2}$, aminek a vetülete a pálcára merőleges irányra, amit most z-vel jelölünk a feladat konvenciója alapján, $\mathrm{d}E_z(z)=\mathrm{d}E(z)\sin\varphi=\frac{k\lambda\mathrm{d}z'}{z^2+(z')^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+(z')^2}}$, majd alkalmazva ismét a szuperpozíció elvét, a következőt kapjuk az felintágrálás után:

$$k\lambda\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z'\frac{z}{(z^2+(z')^2)^{3/2}}=\frac{k\lambda}{z}\int_{-L/2z}^{L/2z}\mathrm{d}z'\frac{1}{(1+(z')^2)^{3/2}}. \tag{13}$$

Ahol áttértünk a $z' \to z'/z$ új változóra, most bevezetve a $\tan x = z'$ új változót, $\mathrm{d}z' = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\frac{k\lambda}{z}\int_{-\mathrm{arctg(L/2z)}}^{\mathrm{arctg(L/2z)}} \mathrm{d}x \frac{1}{\cos^2 x}\cos^3 x = \frac{k\lambda}{z}\int_{-\mathrm{arctg(L/2z)}}^{\mathrm{arctg(L/2z)}} \mathrm{d}x \cos x = \frac{2k\lambda}{z}\sin(\mathrm{arctg}(L/2z)) \\ = \frac{2k\lambda}{z}\frac{L/2z}{\sqrt{1+(L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}},\end{aligned} \tag{14}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$, innen tehát

$$E_z(z) = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{15}$$

Látható, hogy ez éppen a negatív z szerinti deriváltja a fentebb kiszámított potenciálnak, hiszen $-\partial_z\left(2k\lambda \mathrm{arsh}\left(\frac{L}{2z}\right)\right) = \frac{2k\lambda}{2}\frac{L/z^2}{\sqrt{1+(L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{1+(2z/L)^2}}$.
Most vizsgáljuk meg a $z \gg L$ határesetet, ahol sorba fejtjük a potenciálban lévő kifejezést, $\mathrm{arsh}(L/2z) = L/2z + \mathrm{o}\left((L/z)^3\right)$, illetve hasonló módon a térerősségben lévő kifejezést is, $\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1+(2z/L)^2}} = \frac{L}{2z^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{2z}\right)^2}} = \frac{L}{2z^2} + \mathrm{o}\left(L^3/z^4\right)$

$$\Phi(z) = \frac{k\lambda L}{z} + \mathrm{o}\left((L/z)^3\right)\,, \tag{16}$$

$$E_z(z) = \frac{k\lambda L}{z^2} + \mathrm{o}\left(L^3/z^4\right) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{k\lambda L}{z^2}\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{17}$$

ami megfelel a várakozásainknak, hiszen egyrészt vezetőrendben is teljesül, hogy $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$, illetve egy ponttöltés elektromos terét és potenciálját kaptuk vissza!

2. Adott egy R sugarú gyűrű, λ töltéssűrűséggel. A pont legyen a gyűrű középpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$ esetet!

Megoldás:
Paraméterezzük az infinitezimális kerületi darabokat a $\mathrm{d}\theta$ infinitezimális szöggel, amihez az infinitezimális körgyűrű szakasz $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\theta R$ és infinitezimális töltés $\mathrm{d}q = \lambda R \mathrm{d}\theta$ tartozik. A kör középpontjától való távolság állandó, $\sqrt{R^2+z^2}$, vagyis az infinitezimális potenciál járulékok mind szögfüggetlenek, $\mathrm{d}\Phi = kR\lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}$. A teljes potenciál ismét ezek összege a szuperpozícó elvének megfelelően:

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta kR\lambda\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2\pi Rk\lambda}{\sqrt{z^2+R^2}}. \tag{18}$$

Hasonlóan kiszámítható a térerősség is, mivel egy infinitezimális darab térerősségének nagysága, $\mathrm{d}E(z) = k\lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{R^2+z^2}$, továbbá az (x,y) síkon való szimmetria miatt $E_{x,y} = 0$, illetve $\mathrm{d}E_z$ a $\mathrm{d}E(z)$ vetülete a z tengelyre, $\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E(z)\sin\varphi = \mathrm{d}E\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{kR\lambda\mathrm{d}\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$:

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2z\pi Rk\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2z\pi Rk\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{19}$$

Látható, hogy $-\partial_z\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, ami igazolja az $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$ összefüggést.
Megvizsgálva a $z \gg R$ határesetet először a potenciál esetén a következő sorfejtést kell végrehajtanunk:

$$\Phi(z) = \frac{2\pi Rk\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} = 2\pi Rk\lambda\frac{1}{z}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \mathrm{o}\left(z^4/R^4\right)\right) = \frac{2\pi Rk\lambda}{z} + \mathrm{o}\left(R^2/z^3\right)\,, \tag{20}$$

ahol az utolsó lépésben csak a legalacsonyabb rendű $1/z$-s tagot hagytuk meg. Innen egyszerűen meg lehet adni a térerősséget, $E_z = -\partial_z\Phi(z) = \frac{2\pi Rk\lambda}{z^2}$. Vagyis "nagyon messziről" nézve a körgyűrű ponttöltésnek látszódik, ahol a megjelenő "effektív ponttöltés" a kör teljes, $q = 2\pi R\lambda$ töltése.

3. Adott egy R sugarú korong, amelyen σ mennyiségű homogén töltéssűrűség helyezkedik el. A pont legyen a korong közeppontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$, és az $R \gg z$ eseteket!

Megoldás:
Mivel tudjuk az előző feladat alapján, hogy egy r sugarú homogén töltéseloszlású kör potenciálja, illetve elektromos tere, $\mathrm{d}q = 2\pi r \mathrm{d}r\sigma$, most infinitezimális nagyságú, össztöltés esetén:

$$\mathrm{d}\Phi(z) = \frac{2\pi k r\sigma \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,, \tag{21}$$

$$\mathrm{d}E_z(z) = \frac{2\pi k r\sigma z \mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\,. \tag{22}$$

Felösszegezve minden ilyen $\mathrm{d}r$ vastagságú körívre 0-tól R-ig a következő eredmények adódnak:

$$\Phi(z) = \int_0^R \mathrm{d}r \frac{2\pi k\sigma r}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)\,, \tag{23}$$

$$E_z(z) = \int_0^R \mathrm{d}r \frac{2\pi k r\sigma}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 2z\pi k\sigma\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(z)\,\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{24}$$

Rögtön látható, hogy teljesül az $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$, mivel $-\partial_z|z| = -\mathrm{sgn}(z)$, illetve $-\partial_z\sqrt{R^2+z^2} = -\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$. Most vizsgáljuk meg az $R \gg z$ határesetben a potenciál és a térerősség vezetőrendbeli viselkedését, $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = R + \frac{z^2}{2R} - |z| + \mathrm{o}\left(z^3/R^2\right) = R\left(1 - \frac{|z|}{R} + \mathrm{o}\left(z^2/R^2\right)\right)$, ahol az utolsó lépésben, kiemelve R-el, a zárójelen belül elhagyhattunk minden z/R-nél magasabb rendű tagot, vagyis az adott határesetben a potenciál, illetve a megfelelő deriválás után a térerősség, $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$:

$$\Phi(z) \approx 2\pi k R\sigma\left(1 - \frac{|z|}{R}\right)\,, \tag{25}$$

$$E_z(z) \approx 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z) \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{26}$$

Az eredmény hűen tükrözi azt amit vártunk, a körlap méreténél jóval közelebb a körlaphoz a tér vezetőrendben visszaadja a kondenzátoroknál tanult kifejezést! Ez utóbbi eredményhez eljuthattunk volna úgy is, ha a térerősséget vizsgáljuk vezetőrendben:

$$E_z(z) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z) + \mathrm{o}\left(z/R\right)\,, \tag{27}$$

ami láthatóan ugyanazt adja vezetőrendben.
Most az ellenkező határeset, $z \gg R$: $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = \frac{R^2}{2|z|} + \mathrm{o}\left(R^2/z^3\right)$, illetve $\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \mathrm{sgn}(z) - \frac{R^2}{2z^2} + \mathrm{o}\left(R^4/z^4\right)$, innen egyszerűen ismét a potenciál és a belőle származtatott elektromos tér:

$$\Phi(z) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{|z|}\,, \tag{28}$$

$$E_z(z) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{z^2} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{\pi k\sigma R^2}{z^2}\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{29}$$

ami ismét nem másnak felel meg, mint annak az esetnek, amikor nagyon messziről tekintve egy töltés elrendezést, az vezetőrendben ponttöltésnek látszódik, egy effektív, a rendszerben lévő össztöltéssel megegyező össztöltéssel!

III. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK A GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét, valamint potenciálját a megadott pontokban!

1. Adott egy végtelen hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálcától z távolságra. Vesse össze az eredményt a véges pálcára talált eredménnyel, ha a pálca hossza a végtelenbe tart!

Megoldás:
Vegyünk egy henger felületet egy tetszőleges z távolságnál a z' tengellyel párhuzamosan, amely a Gauss-tételben megjelenő felületként fog szolgálni, ekkor a végtelen hosszú vonalat körbe ölelő hengerfelületre a Gauss-tétel:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{30}$$

Esetünkben egy hengerszimmetrikus teret integrálunk egy fix r sugarú hengerre: $\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(z) = 2\pi z \int_0^L \mathrm{d}z' E(z) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$:

$$\mathbf{E}(r) = E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{2k\lambda}{z}\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{31}$$

ahol a vonalvezető végtelen hossza miatt a rendszer transzlációs szimmetriával bír, vagyis tetszőleges véges L darabon érvényesnek kell lennie a Gauss-tételnek! Úgy is fogalmazhattunk volna, hogy L "kellően nagy" ahhoz, hogy elhanyagolhassuk a henger alapkörein vett elektromos tereket.
A véges méretű pálca esetén a következő eredményt kaptuk, $E_z(z) = \frac{2k\lambda}{z}\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}}$, most sorbafejtve vezetőrendig:

$$E_z(z) \approx \frac{2k\lambda}{z} \to \mathbf{E}(z) = \frac{2k\lambda}{z}\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{32}$$

mivel legelső rendben $\frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2+1}} = 1 + \mathrm{o}\Big((z/L)^2\Big)$. Vagyis láthatóan ugyanaz az eredmény adódott a két számolásból és az irányuk is megegyezik, mivel az explicit integrálás során is radiális irányú volt a tér (annyi különbséggel, hogy ott a feladat leírása szerint ezt a távolságot z-vel jelöltük.)

2. Adott egy végtelen felület σ töltéssűrűséggel. A pont legyen a felülettől z távolságra. Vesse össze az eredményt a véges sugarú korongra talált eredménnyel, ha a korong sugara a végtelenbe tart!

Megoldás:
Ismét alkalmazzuk a Gauss-tételt, ehhez vegyük a végtelen felülettől $\pm z$ távolságra lévő végtelen felületeket, a rendszer 2 dimenziós transzlációs szimmetriája miatt ismét elegendő tekintenünk egy A területű négyzetet a Gauss-tételhez, illetve ekkor az elektromos tér is csak a z irányú lehet és csak z-től függhet:

$$\oint_A \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2AE_z(z) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{33}$$

ahol az $\mathrm{sgn}(z)$ eredete az, hogy a Gauss-tétel felírása előtt már ilyen irányúnak tételeztük fel a teret szimmetriai megfontolásokból. Összevetve a körlapra kapott eredményünkkel, ahol a véges sugár esetén $E_z(z) = 2\pi k\sigma\Big(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big)$, ami vezetőrendben, ha $R \gg z$, $\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2}} = \mathrm{sgn}(z) + \mathrm{o}(z/R)$, vagyis a $z/R \ll 1$ limeszben éppen visszakapjuk, hogy $E_z(z) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z)$. Tehát

$$E_z(z) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z) + \mathrm{o}\left(z/R\right)\,. \tag{34}$$

3. Adott egy R sugarú gömb amelynek térfogati töltéssűrűsége ρ, felületi töltéssűrűsége σ. Számolja ki a gömb elektromos terét valamint potenciálját az $r < R$ és $r > R$ régiókban a Gauss tétel segítségével! Igazolja, hogy a felületi töltéssűrűség az elektromos térerősségben $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ nagyságú ugrást okoz!

Megoldás:
Vegyünk egy tetszőlegs $r < R$ sugarú gömböt amiben összesen $Q(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ töltés helyezkedik el, ekkor az r sugarú gömbfelszínt tekintve a Gauss-tételben, az elektromos tér gömbszimmetrikussága miatt:

$$\oint \mathrm{d}^2\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \to E_r(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} = \frac{kQr}{R^3}\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{35}$$

Most tekintsük a gömbön kívüli teret, amikor az $r > R$ sugarú gömb magában foglalja a gömb teljes töltését, $Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$, illetve a teljes felületen lévő töltéseket is, $Q \to Q + 4\pi R^2\sigma$ ekkor hasonló megfontolások alapján a következő Gauss tételt írhatjuk fel:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r E_r(r) = \frac{Q + 4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(r) = \frac{k\big(Q + 4\pi R^2\sigma\big)}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{36}$$

Most megmondhatjuk, hogy mekkora a változása az elektromos térnek a felületen lévő töltések hatására, $\Delta E_r \equiv E_r(R+0) - E_r(R-0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, vagyis látható, hogy a térerősség ugrása éppen megegyezik azza la térerősség járulékkal, mai a felületi töltéssűrűségből adódik.

IV. GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSA - INHOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁSOK

(Megoldást ld. a weblapon.)

Számolja ki az elektromos teret a következő esetekben. Készítsen vázlatot is róla a releváns távolság függvényében.

1. $\rho(r) = \alpha r$ inhomogén töltéssűrűségű, R sugarú gömb esetében, az origótól r távolságra.

   Megoldás:
   Vegyünk ismét egy tetszőleges r sugarú gömbfelületet a Gauss-tételhez, ekkor a tér gömbszimmetrikussága miatt $\oint \mathrm{d}^2\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}(r) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$, ahol a töltést 0-tól r sugárig vett térfogati integrálással tudjuk meghatározni:

$$Q(r) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\int_0^r \mathrm{d}r'(r')^2\,\alpha r' = 4\pi\alpha\frac{r^4}{4} = \alpha\pi r^4, \tag{37}$$

   ahonnan a tér $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha r^3}{4\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$, ha $r < R$. Ellenkező esetben, ha $r > R$, egyszerűen a gömb össztöltését kell tekintenünk a Gauss tételben, ahonnan a "szokásos módon"

$$\oint \mathrm{d}^2\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}(r) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha\pi R^4}{\varepsilon_0} \to E_r(r) = \frac{\alpha R^4}{4r^2\varepsilon_0} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha R^4}{4r^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{38}$$

2. Egy bizonyos régióban az elektromos tér $\mathbf{E} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$ (gömbkoordinátákban), ahol k egy konstans.

   (a) Számolja a ki teljes töltést, amelyet egy R sugarú origó középpontú gömb tartalmaz!

   Megoldás:
   Alkalmazzuk visszafele a Gauss-tételt, vagyis hasonlóan eljárva, mint a korábbi példákban egy $r < R$ sugarú gömbre vett felületi integrál értéke. Mivel tudjuk, hogy a térerősség gömbszimmetrikussága azonnal implikája a töltéssűrűség gömbszimmetrikus alakját is, ezért a Gauss-tétel az alábbi speciális formát ölti:

$$4\pi R^2 E_r(r) = 4\pi k r^5 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \to Q(r) = 4\pi k r^5\varepsilon_0. \tag{39}$$

   (b) Számolja ki a töltéseloszlást!

   Megoldás:
   Mivel a fenti állítás természetesen tetszőleges $r < R$ esetén is teljesül, ahonnan a gömbszimmetrikus töltéseloszlás megváltozását a következőképpen tudjuk felírni

$$\mathrm{d}Q(r) = \rho(r)\,4\pi r^2\mathrm{d}r\,, \tag{40}$$

   ahol

$$\mathrm{d}Q(r) = Q(r+\mathrm{d}r) - Q(r) = \frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = 20\pi k\varepsilon_0 r^4\mathrm{d}r = \rho(r)\,4\pi r^2\mathrm{d}r \to \rho(r) = 5\varepsilon_0 k r^2. \tag{41}$$

V. ELEKTROMOS KETTŐSRÉTEG

(Nem került sorra.)

1. Adott két R sugarú körlap, az egyiken $+\sigma$, a másikon $-\sigma$ egyenletes töltéssűrűséggel, úgy, hogy össztöltésük $\pm Q$. A két körlap egymással párhuzamosan helyezkedik el az xy síkkal párhuzamosan, középpontjuk a z tengelyen a $\pm\delta/2$ pontokban van.

   (a) Írjuk fel a két körlap eredő elektromos térerősségét a z tengely mentén!
   Megoldás:
   Tudjuk a **II**/3-as feladatból, hogy ekkor a két tér ellentétes irányú $E_z^{\pm}(z) = \pm 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}}\right)$, ahonnan a teljes tér:

$$E_z(z) = 2\pi k\sigma\left(\mathrm{sgn}(z+\delta/2) - \mathrm{sgn}(z-\delta/2) + \frac{z-\delta/2}{\sqrt{R^2+(z-\delta/2)^2}} - \frac{z+\delta/2}{\sqrt{R^2+(z+\delta/2)^2}}\right). \tag{42}$$

   (b) Vegyük azt a határesetet, amikor $\delta \to 0$ úgy, hogy $\sigma\delta = \tau$ állandó marad (elektromos kettősréteg τ felületi dipólsűrűséggel)! Mennyi az elektromos térerősség a z tengely pontjaiban?
   Megoldás:
   Most fejtsük sorba a $\sigma\frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}}$ kifejezést, ahol $\sigma\to\infty$, $\delta\to 0$, úgy hogy $\sigma\delta=\tau$ állandó marad:

$$\begin{aligned}\sigma\frac{z\mp\delta/2}{\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2}} &= \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z\mp\delta/2}{R}\right)^2}} \approx \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2\mp z\delta/R^2}}\\ &\approx \sigma\frac{z\mp\delta/2}{R\sqrt{1+(z/R)^2}}\left(1\pm\frac{z\delta}{2R^2\left(1+(z/R)^2\right)}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

   Most véve a két tag különbségét, látható, hogy a δ-t nem tartalmazó tagok éppen kiejtik egymást, míg a $\sim\delta^2$ másodrendű kifejezéseket elhanyagoljuk, mivel $\sigma\delta^2\to\tau\delta\to 0$, illetve a $\mp\frac{\sigma\delta/2}{R\sqrt{1+(z/R)^2}}$ és a $\sim\pm\frac{z^2\sigma\delta}{2R^3\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}$ tagok éppen megegyező előjellel fognak előfordulni:

$$E_z(z) = 2\pi k\frac{\sigma\delta}{R^3\sqrt{1+(z/R)^2}}\left(\frac{z^2}{1+(z/R)^2} - R^2\right) = -\frac{2\pi\tau}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}. \tag{44}$$

   Ezt követően már csak a kettő sgn függvényt kell megfelelően sorbafejtenünk, $2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z\pm\delta/2) = 2\pi k\sigma\mathrm{sgn}(z)\pm\pi k\tau\delta(z)$, amiből az első tag kiesik a $\pm$-os tagok összegzése után, tehát végeredményben:

$$E_z(z) = 2\pi\tau\left(\delta(z) - \frac{1}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}\right). \tag{45}$$

   (c) Számolja ki az elektromos potenciált a $z>0$ és a $z<0$ félegyenesek mentén! Mennyi a kettős réteg két oldala között a potenciálkülönbség? Mi ennek a szemléletes fizikai magyarázata?

   Megoldás:
   Most számítsuk ki ismét hasonló sorfejtések segítsével a portenciálkülönbséget a két réteg lözött, ahol a potenciál $\Phi_\pm(z) = \pm 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+(z\mp\delta/2)^2} - |z\mp\delta/2|\right)$ (szintén a **II**/3-as feladat alapján). Sorba fejtve az első tagot, először a gyök alatt vezetőrendig δ szerint, $\sqrt{R^2+z^2\mp z\delta}\approx\sqrt{R^2+z^2}\left(1\mp\frac{z\delta}{2(R^2+z^2)}\right) = \sqrt{R^2+z^2}\mp\frac{z\delta}{2\sqrt{R^2+z^2}}$, amiből véve a két tag összegét, csak a második fog megmaradni, $\Phi_+(z)+\Phi_-(z)\to$

$-\frac{z\delta}{\sqrt{R^2+z^2}}$.
Most végezzük el a vezetőrendbeli sorfejtését a $|z \mp \delta/2|$ tagnak:

$$|z \mp \delta/2| = |z| \mp \delta/2\,\mathrm{sgn}(z) \tag{46}$$

amiből a két tag összeadása után csak a $\delta/2\,\mathrm{sgn}(z)$ marad meg, összességében a potenciálra a következő kifejezést adva:

$$\Phi(z) = 2\pi\tau\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{\mathrm{sgn}(z)}{2}\right), \tag{47}$$

Láthtó, hogy telejsül ismét a $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$ összefüggés, hiszen $\partial_z\mathrm{sgn}(z) = 2\delta(z)$, illetve $-\partial_z\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{-1}{R\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}$.