

1. Elektrodinamika gyakorlat

Vektor kalkulus - ismétlés

Jelölések:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \nabla f \\ \text{div } \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

ahol

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

a nabla operátor, \cdot a skaláris és \times a vektoriális szorzatot jelöli. A Laplace operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

I. SZORZATOK DERIVÁLÁSA

Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat!

1.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az indexes jelölésmódot, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i$ vektormező esetén a **divergencia**, ami egy **skalármennyiség** és az Einstein konvenció alapján az i index szerinti összegzés értendő, illetve $(\nabla \cdot f)_i = \partial_i f$, skalártér esetén a **gradiens**, ami egy **vektormennyiség**, i a vektor komponenseit indexeli, ami a skalártér/többváltozós függvény i . parciális deriváltja.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \partial_i (f v_i) = \partial_i (f v_i) = (\partial_i f) v_i + f (\partial_i v_i) = (\nabla f)_i v_i + f (\nabla v)_i = (\nabla \cdot f) \mathbf{v} + f (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1)$$

2.

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

Megoldás:

Ismét alkalmazzuk a **rotációnál** tanult indexes kifejezést, $(\nabla \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$, illetve hasonlóan két vektor keresztszorzata esetén, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$. Alkalmazva a divergencia indexes kifejtését:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \partial_i (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \partial_i (\varepsilon_{ijk} u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} [\partial_i (u_j) v_k + u_j \partial_i (v_k)], \quad (2)$$

ahol az utolsó lépésben egyszerűen csak alkalmaztuk az $u_j v_k$ szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt. Az összeg első tagja ezt követően a Levi-Civita szimbólum indexeit ciklikusan permutálva, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$, a következőképpen írható fel:

$$v_k \varepsilon_{ijk} \partial_i u_j = v_k \varepsilon_{kij} \partial_i u_j = v_k (\nabla \times \mathbf{u})_k \equiv (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (3)$$

A második tag esetén hasonlóan járunk el, azzal különbséggel, hogy most a Levi-Civita szimbólum antiszimmetrikus tulajdonságát használjuk fel, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$:

$$u_j \varepsilon_{ijk} \partial_i v_k = -u_j \varepsilon_{jik} \partial_i v_k = -u_j (\nabla \times \mathbf{v})_j \equiv -\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (4)$$

Összerakva a (2)-es egyenlet két tagját a végeredmény egyezik a kívánt kifejezéssel! Természetesen mindenhol, ahol kétszer fordult elő egy index, függetlenül attól, hogy ezt éppen milyen betűvel jelöltük, összegzést kellett érteni az Einstein-konvenciónak megfelelően!

II. GRADIENS/GAUSS/STOKES-TÉTEL

1. Adott a következő vektormező:

$$\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{\mathbf{y}} + (4yz^2)\hat{\mathbf{z}}. \quad (5)$$

Adott ezenkívül a következő felület: egy egységnyezet, amelynek az egyik sarka az origóban, két oldala pedig a pozitív y, z tengelyek mentén található.

(a) Számolja ki a vektormező rotációját!

Megoldás:

Azokban az esetekben, amikor ismerjük a vektormező alakját egy adott koordináta-rendszerben, előnyösebb a rotáció (avagy egyéb differenciál operátor) ismert alakját használni, ami a legegyszerűbb esetben, Descartes koordináta-rendszerben a következő:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Esetünkben $v_x = 0$, $v_y = 2xz + 3y^2$, $v_z = 4yz^2$, ahonnan $\partial_y v_x = \partial_z v_x = 0$; $\partial_x v_y = 2z$, $\partial_z v_y = 2x$; $\partial_x v_z = 0$, $\partial_y v_z = 4z^2$, aminek segítségével visszahelyettesítve (6)-ba:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 4z^2 - 2x \\ 0 \\ 2z \end{bmatrix} \quad (7)$$

(b) Ellenőrizze a Stokes-tétel érvényességét erre a vektorfüggvényre az adott felületen!

Megoldás:

Az egységnyezet széleinek koordinátái: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, a pontokat összekötő élek mentén vett vonalintegrál elvégzéséhez a természetes paraméterezés a $t \in [0, 1]$ segédváltozó segítségével, illetve feltüntetve a vektormező t függését is:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ (0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) &: y(t) = t, z(t) = 0, v_y(t) = 3t^2, v_z(t) = 0, \\ (0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1) &: y(t) = 1, z(t) = t, v_y(t) = 3, v_z(t) = 4t^2, \\ (0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1) &: y(t) = 1 - t, z(t) = 1, v_y(t) = 3(1 - t)^2, v_z(t) = 4(1 - t), \\ (0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0) &: y(t) = 0, z(t) = 1 - t, v_y(t) = 0, v_z(t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

A vonalmenti integrálást a megszokott módon végezzük el: $\int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$

$\equiv \int_0^1 dt [\dot{x}(t)v_x(t) + \dot{y}(t)v_y(t) + \dot{z}(t)v_z(t)]$, ami tetszőleges egymás utáni szakaszdarabokra is igaz.

Beírva ezeket az értékeket és véve a megfelelő szakaszokat, összességében elegendő egy integrált leírunk, mivel mind a négy szakasz mentén az integrálási t változó 0-tól 1-ig változik.

$$\int_0^1 dt [3t^2 + 4t^2 - 3(1 - t)^2] = 4/3. \quad (9)$$

Most a Stokes-tétel alapján teljesülnie kell(ene), hogy erre az egységnyezetre vett felületi integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőnek megegyezik a fenti vonalintegrálás által kapott értékkel! A Stokes tétel alapján $\int_{C=\partial F} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_F d^2\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}))$, a vektortér rotációjának adott felületre vett integrál értéke megegyezik a felület határán húzódó görbére vett vonalintegrállal.

Felületi integrálok kiszámításához, kettő segédparaméterre van szükségünk, $(u, v) \in [0, 1]^2$, ami paraméterezi a felületet, esetünkben ezekkel a következőképpen fejezhetjük ki az x, y, z koordináta változókat, illetve a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér elemeit:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 0, y(u, v) = u, z(u, v) = v \\ v_x(u, v) &= 0, v_y(u, v) = 3u^2, v_z(u, v) = 4uv^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Ekkor afelületi integrál egyszerűen, tudva, hogy felület normális vektora $-x$ irányú, $d^2\mathbf{f} = -dudv \hat{\mathbf{x}}$

$$\int_0^1 du \int_0^1 dv \hat{\mathbf{x}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))) = \int_0^1 du \int_0^1 dv \hat{\mathbf{x}} \cdot \begin{bmatrix} 4v^2 \\ 0 \\ 2v \end{bmatrix} = \int_0^1 du \int_0^1 dv 4v^2 = 4/3. \quad (11)$$

Láthatóan a két eredmény megegyezik, engedelmeskedve a Stokes-tételnek!

III. PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Mutassa meg a következő azonosságokat! Az $\int_V \dots d^3\mathbf{r}$, $\int_F \dots d^2\mathbf{f}$, $\int_C \dots dl$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1.

$$\int_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3\mathbf{r} = - \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d^3\mathbf{r} + \int_F f \mathbf{A} \cdot d^2\mathbf{f}. \quad (12)$$

Megoldás:

Használjuk az 1. feladatban levezetett azonosságot, $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$. Ezt kombinálva a Gauss-Osztrogatszkij törvénnyel, $\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d^2\mathbf{f} \mathbf{v}(\mathbf{r})$, vagyis adott térfogatra vett integrálja egy tetszőleges vektormező divergenciájának megegyezik a vektormezőnek térfogatot lezáró zárt felületre vett integráljával, a következő adódik:

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \int_{F=\partial V} d^2\mathbf{f} f\mathbf{A} = \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{A} \cdot (\nabla f) + \int_V d^3\mathbf{r} f(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (13)$$

Ezt átrendezve már könnyedén következik a bizonyítani kívánt egyenlőség.

2.

$$\int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_F d^2\mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14)$$

Megoldás:

Használjuk fel az előző részfeladatban kapott összefüggést, az $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, illetve $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ megfelelőekkel! Ekkor egyszerűen kiszámolható a ∇f , ugyanis tudjuk, hogy egyrészt $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, illetve

$$\partial_i \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3} \rightarrow \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (15)$$

Innen pedig, mivel csak konstans eltolást, illetve egy -1 -el való szorzást alkalmaztunk az argumentumban, $\frac{1}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$, a kérdéses gradiens is hasonlóan adható meg:

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (16)$$

Tehát beláttuk, hogy ha (most, midőn az integrálási változó az \mathbf{r}') $\mathbf{A}(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}')$, illetve $f(\mathbf{r}') \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, visszakapjuk az első részfeladatban belátott összefüggést, ahol még átrendeztük a két térfogati tagot a túloldalra, amivel az állításunkat beláttuk.

IV. A GAUSS ÉS A STOKES TÉTELBŐL KÖVETKEZŐ TOVÁBBI TÉTELEK

Bizonyítsa be a következő állításokat! Az $\int_V \dots d^3\mathbf{r}$, $\int_F \dots d^2\mathbf{f}$, $\int_C \dots dl$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

$$1. \int_V (\nabla T) d^3 \mathbf{r} = \oint_{\partial V} T d^2 \mathbf{f}$$

{Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ kifejezésre (ahol \mathbf{c} egy konstans vektor), és alkalmazza a szorzatmezők deriválására érvényes szabályokat.}

Megoldás:

Használjuk a segítséget, azaz vegyük az általános kifejezést, az általánosság megcsorbítása nélkül, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{c}T$, ahol \mathbf{c} egy konstans értékű vektor. Ekkor a \mathbf{v} vektormezőre hatatva a nabla operátort, azaz véve annak divergenciáját az 1. feladat alapján egyszerűen $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{c}T) = \mathbf{c} \cdot \nabla T$. Ennek ismeretében alkalmazzuk a Gauss-tételt a \mathbf{v} vektormezőre:

$$\int_V d^3 \mathbf{r} \nabla \cdot (\mathbf{c}T) = \int_V d^3 \mathbf{r} \mathbf{c} \cdot \nabla T = \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{f} \mathbf{c}T. \quad (17)$$

Mivel \mathbf{c} egy konstans értékeű vektor kihozható az integrálás elé, ekkor az második kifejezést, $\mathbf{c} \cdot \int_V d^3 \mathbf{r} \nabla T$, úgy kell értelmeznünk mint a \mathbf{c} vektor és az infinitezimális térfogatelemekkel beszorzott ∇T gradiensek összegének, ami továbbra is egy vektor, a skalárszorzatát. A harmadik tag esetén, $\mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{f} T$, pedig arról van szó, hogy a \mathbf{c} vektort skalárisan szorozzuk a $d^2 \mathbf{f}$ infinitezimális felület vektorok és T adott felületi pontban felvett értékek szorzatainak összegéből kapott vektorral. Vagyis ekkor minden $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ és így minden \mathbf{c} esetén teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{c} \cdot \int_V d^3 \mathbf{r} \nabla T = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{f} T, \quad (18)$$

ami viszont csak úgy lehetséges, ha a \mathbf{c} -el skalárisan szorzott két tag is megegyezik, a 3 dimenziós szokásos skalárszorzatos tér teljessége miatt, amivel állításunkat igazoltuk!

$$2. \int_V [T \nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] d^3 \mathbf{r} = \oint_{\partial V} (T \nabla U) \cdot d^2 \mathbf{f}$$

{Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = T \nabla U$ kifejezésre.}

{Megjegyzés: Ez **Green 1. azonossága.**}

Megoldás:

Az útmutatásnak megfelelően ismét alkalmazzuk a Gauss-tételt, de most a $\mathbf{v} = T \nabla U$ kifejezésre. Ekkor ismét az 1. feladat alapján, illetve a Laplace operátort $\Delta \equiv \nabla^2$ módon jelölve az egyértelműség kedvéért:

$$\int_V d^3 \mathbf{r} \nabla \cdot (T \nabla U) = \int_V d^3 \mathbf{r} \nabla T \cdot \nabla U + T \nabla^2 U = \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{f} \cdot (T \nabla U) \quad (19)$$

Ahol csak alkalmazzuk, még egyszer kihangsúlyozva, hogy $\nabla \cdot (T \nabla U) = \nabla T \cdot \nabla U + T \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla T \cdot \nabla U + T \nabla^2 U$, illetve a második egyenlőségénél alkalmazzuk a Gauss-tételt!

V. DIRAC δ -FÜGGVÉNY

1. Vázolja fel a

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (20)$$

vektorfüggvény "erővonalait" ($\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

2. Számolja ki \mathbf{v} divergenciáját. Miért meglepő ez az eredmény a felvázolt vonalakkal összehasonlítva?

Megoldás:

A divergencia operátor gömbi koordinátrendszerben:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (21)$$

ahol $v_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}$, $v_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{v}$, $v_\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{v}$. Esetünkben $v_\varphi = v_\theta = 0$, $v_r = \frac{1}{r^2}$. Ekkor a divergencia kiszámításánál csak az (21)-es egyenlet első tagját kell tekintenünk:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \frac{1}{r^2})}{\partial r} = 0, \quad (22)$$

mivel egy konstans kell deriválnunk r szerint! Ez azt sugallaná, hogy ez az erőter forrásmentes, ami intuitívan ellentmond annak az erővonalképnek, ami nyilvánvalóan olyan képet ad nekünk, mintha az erővonalak egy pontszerű forrásból származnának.

3. A Dirac δ -függvény segítségével megoldhatjuk a fenti “paradoxont.” A

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (23)$$

vektormező divergenciája nulla minden pontban, az origó kivételével, ahol viszont szinguláris. A háromdimenziós Dirac δ -függvény definíciójából kiindulva

$$\int_V d^3\mathbf{r} \delta^3(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{0}). \quad (24)$$

A Gauss tétel

$$\int_V d^3\mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \int_F d^2\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (25)$$

segítségével mutassa meg, hogy

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}), \quad (26)$$

valamint, hogy

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Megoldás: A hiba tehát onnan származik, hogy a $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ az $r = 0$ nincs definiálva, ott a vektortér szinguláris. Hogy feloldjuk az ellentmondást és információt szerezhessünk arról, hogy miként lehet értelmezni ennek a divergenciát az $r = 0$ -ban, tekintsük a térfogati integrálját egy R sugarú gömbön belül a kérdéses kifejezésnek, $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$ és használjuk a Gauss-tételt:

$$\int_{V_R} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \oint_{F=\partial V_R} d^2\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (28)$$

A felületi integrálnál a sugár hossza állandó, $r = R$, továbbá ha áttérünk gömbi koordinátákra, az integrálási mértéka a következő alakot ölti, $d^2\mathbf{f} = d\varphi d\theta \sin\theta R^2 \hat{\mathbf{r}}$:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \hat{\mathbf{r}} R^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi. \quad (29)$$

Vagyis adott egy kifejezés, “függvény” minden $\mathbf{r} \in R^3$

left $\mathbf{0}$ zérus, míg a nullában oly módon szinguláris, hogy az itnegrálja minden $R > 0$ esetén:

$$\int_{V_R} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \quad (30)$$

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r})$.

VI. VEKTOR DERIVÁLT SZÁMOLÁSOK

Számolja ki az alábbi deriváltakat!

1. $\text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$

Megoldás:

Alkalmazzuk ismét az indexes számolást, illetve a korábban az $\frac{1}{r}$ -re levezetett szabályt általánosan, $\partial_i f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{x_i}{r} \rightarrow \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \partial_r f(r)$

$$\text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \left(\frac{m_l x_n}{r^3} \right) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} m_l \left[-3 \frac{x_n x_j}{r^5} + \frac{\delta_{nj}}{r^3} \right]. \quad (31)$$

Most alkalmazzuk a két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó összefüggést, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, amit visszaírva és egybeejtve a megfelelő indexet a következőt kapjuk:

$$(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}) m_l \left[-3 \frac{x_n x_j}{r^5} + \frac{\delta_{jn}}{r^3} \right] = -3m_i \frac{x_j x_j}{r^5} + 3m_j \frac{x_i x_j}{r^5} + 3m_i \frac{1}{r^3} - m_j \delta_{nj} \delta_{in} \frac{1}{r^3}, \quad (32)$$

ahol a harmadik tagban lévő 3-as szorzó egyszerűen csak a $\delta_{jn}\delta_{jn} = \delta_{jj} = 3$ dupla indexre való összegzésből jött. Az utolsó tag eredménye pedig $-m_j \delta_{ij} \frac{1}{r^3} = -\frac{m_i}{r^3}$. Ami így összességében a következőt adja:

$$\left(\text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)_i = \frac{3x_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - m_i r^2}{r^5} \rightarrow \text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5}. \quad (33)$$

2. $\text{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$

Megoldás:

Írjuk ki definíció szerint a kérdéses gradiens, mint vektor i . komponensét:

$$\partial_i \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \partial_i \left(\frac{p_j x_j}{r^3} \right) = p_j \partial_i \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = p_j \left[\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right] = \frac{p_i}{r^3} - 3 \frac{x_i p_j x_j}{r^5} = \frac{p_i}{r^3} - 3 \frac{x_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^5}. \quad (34)$$

Azaz vektorosan kiírva gradiens értéke:

$$\text{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p} r^2 - 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}. \quad (35)$$

VII. SZÁMOLÁSOK DIRAC δ -FÜGGVÉNNYEL

Számolja ki az alábbi integrált!

1. $\int_V (r^4 + r^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) + c^4) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{c}) d\mathbf{r}$, ahol V egy 6 egység sugarú gömb az origó körül, és $\mathbf{c} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$, amelynek hossza c .

Megoldás:

Definíció szerint $\int_V d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{c}) = f(\mathbf{c})$, ha $\mathbf{c} \in V$, egyébként pedig nulla. Alkalmazva ezt arra az esetre, ha V az origó középpontú $R = 6$ sugarú gömb és $\mathbf{c} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$, elegendő csak azt megvizsgálnunk, hogy mekkora a konstans \mathbf{c} vektor hossza, $|\mathbf{c}| = \sqrt{38} > 6$, vagyis a pont nincs benne az integrálási tartományban, ami lenullázná a Dirac-delta argumentumát, vagyis az integrál értéke $\equiv 0$!