Példák: Kvázistacionárius mezők

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. Faraday-törvény:
   Nem sztatikus esetben, amikor a mágnese tér is változhat az időben az elektromos tér örvényerősségére vonatkozó Maxwell- egyenletet a következő taggal kell kibővítenünk:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

   amely esetén $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ úgy viselekdik, mint az áram a mágneses terén esetén, de most balkéz szabály alapján tudjuk megmondani az indukált elektromos tér irányát időben változó mágneses tér esetén, a képletben is látható mínusz előjel miatt! Integrális alakban a következő alakot veszi fel az egyenlet:

$$\mathcal{E} = \oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B} = -\dot{\Phi}_B \tag{2}$$

   ahol $\mathcal{E}$ az elektromotoros erő.

2. Energia mérlegegyenlet:
   Az energiasűrűség időbeli megváltozása, azaz a telejsítménysűrűség $\mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r})$, amelyet a következőképpen tudunk kifejezni csak az elektromos és mágneses terek segítségével:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})\;\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \partial_t w + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{3}$$

   ahol a tagok rendre energia forrássűrűség, energia sűrűség, energia áramsűrűség, amik a kontinuitási egyenlet szokásos alakját veszik fel és a következőképpen fejezhetőek ki:

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\,\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{H}) \tag{4}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{5}$$

3. Önindukció és kölcsönös indukció:
   Vékonyvezetők esetén a kölcösnös indukciós együtthatók $L_{k\neq i}$ megadják, hogy a k-adik áramkörben mért mágneses fluxus létrehozásához az i áram milyen mértékben járul hozzá.

$$\Phi_k = \sum_i L_{ki} I_i \tag{6}$$

   Míg az önindukciós tényező, $\Phi_k = L_{kk} I_k$, megadja, hogy a k-adik áramkörben mért fluxushoz maga az áramkör mekkora mértékben járul hozzá.
   Mágneses tér energiája az indukciós együtthatókkal:

$$W = \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \tag{7}$$

II. KÖRHUROK SZOLENOIDBAN (A TÍPUSÚ)

Egy hosszú a sugarú szolenoidban váltóáram folyik, úgy hogy a belül jelen lévő mágneses tér:

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}} \tag{8}$$

Egy $a/2$ sugarú kör alakú hurkot helyezünk a szolenoid belsejébe, úgy, hogy szolenoid tengelye átmegy a kör középpontján. Számolja ki a hurokban indukált áramot az idő függvényében!
Megoldás:

Az időben változó $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$ mágneses tér a Faraday törvény alapján a következő módon kelt elektromos teret:

$$\mathcal{E}(t) = -\dot{\Phi}_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B}(t) \equiv \frac{a^2\pi}{4}B_0\omega\sin(\omega t) \tag{9}$$

ahonnan az indukált áram egy R ellenállású vezető esetén egyszerűen:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{a^2\pi B_0\omega}{4R}\sin(\omega t) \tag{10}$$

III. MÁGNESES AJTÓZÁR (A TÍPUSÚ)

Tekintsünk egy $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mágneses mezőt, amelyet (folytonos) erővonalakkal szemléltethetünk. Jelöljünk ki egy erővonalak által határolt l hosszúságú "fluxuscsövet"!

1. Mutassuk meg, hogy a cső mentén a Φ mágneses fluxusra egy formális "Ohm törvény" írható fel, ha a "mágneses feszültséget" és a "mágneses ellenállást" megfelelő módon definiáljuk!
2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges geometriájú, tekerccsel ellátott "vasmagos" elrendezés a fent kapott "mágneses Ohm törvénnyel" (az egyenáramú hálózatokhoz hasonlóan) számolható. Ekkor feltesszük, hogy a mágneses erővonalak gyakorlatilag mindvégig a vasmagban maradnak, azaz a szórt tereket elhanyagoljuk!
3. A virtuális munka elvének alkalmazásával határozzuk meg a 1. ábrán látható egyszerű mágneses ajtózárban fellépő erőt, ahol a tekercs menetszáma N és benne I áram folyik, a vasmag releváns szélessége w, a zár légrése g és az ábra síkjára merőleges vastagsága D!

Megoldás:

1. Mágneses Ohm törvény $\Leftrightarrow$ mágneses indukcióra vonatkozó Maxwell egyenletek mágnesezhető anyagokban, szabad áramok nélkül:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{11}$$
$$\nabla\times\mathbf{H} = 0 \leftrightarrow \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{12}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{13}$$
$$\Phi_B \leftrightarrow I \tag{14}$$

   Ekkor a "mágneses" áramkörben a feszültség egyszerűen $\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{H} \equiv \mathcal{F}$.

   Innen már tudjuk relálni a megfelelő rendszerfüggő paraméterekkel a mágneses fluxust és "mágneses áramot" a toroidnak megfelelő tekercsben, aminek hossza l, illetve keresztmetszeti alapterülete $A = wD$, a mágneses feszültség $\mathcal{F} = NI$, mivel ez adja meg az Ampere-törvény alapján a $\mathbf{H}$ vonalintegrálját. Ekkor a mágneses ellenállás $R = \frac{\mathcal{F}}{\Phi_B} = \frac{NI}{\frac{\mu_0 NIA}{l}} = \frac{l}{\mu_0 A}$.

2. "Mágneses Kirchoff" törvények:

$$\sum_i \mathcal{F}_i = 0 \Leftrightarrow \oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{H} = 0 \tag{15}$$
$$\sum_{\text{csomópontok}} \Phi_{B_i} = 0 \Leftrightarrow \oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

   azaz egy zárt áramkörben a teljes feszültség különbség zérus, míg a második törvény a forrásmenetsséget fejezi ki, vagyis az "mágneses" áramnak nincsen forrása a vizsgált rendszerben.

3. A tekercselés miatt a mágneses áram egyszerűen $\mathcal{F} = NI = R_1\Phi_1 + 2R_2\Phi_2 + R_3\Phi_3$, ahol $R_1 + R_3 = \frac{l}{\mu_0 A}$, illetve $R_2 = \frac{2g}{\mu A}$, ekkor az egyenáramoknál tanultak alapján a teljes ellenállás egyszerűen a három ellenállás összege, $R = \frac{l}{\mu_0 A} + \frac{2g}{\mu A}$, ahonnan már kifejezhető az egységnyi idő alatt való energia megváltozás:

$$W = \frac{1}{2}\Phi_B\mathcal{F} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{(NI)^2}{\frac{l}{\mu_0 A} + \frac{2g}{\mu A}} \tag{17}$$

Most a virtuális munka elvét alkalmazva vennünkkell ennek a kifejezésnek a légrés szerinti megváltozását, azaz

$$F = -\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{d}g}\Big|_{g=0} = \frac{1}{\mu A}\frac{(\mu_0 NIA)^2}{l^2} = \frac{\Phi_B^2}{\mu A} \tag{18}$$

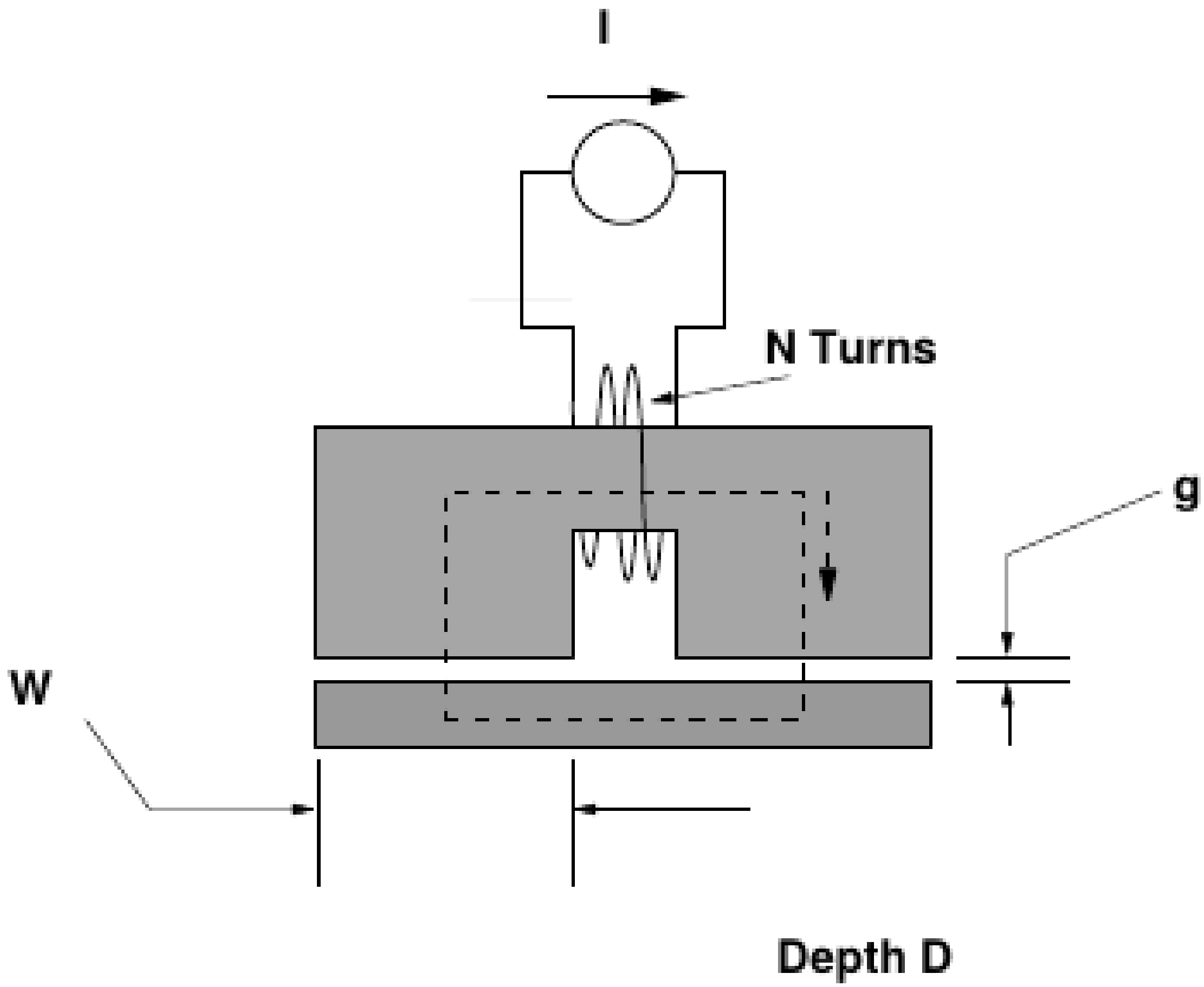

FIG. 1. Mágneses ajtózár

IV. ELVÁGOTT HUZAL (B TÍPUSÚ)

Egy a oldalhosszúságú négyzethurok, amelynek R az ellenállása egy végtelen egyenes huzaltól s távolságra van (2. ábra). A huzalt egy adott időben elvágjuk, így az áram hirtelen nullára esik. Milyen irányba folyik áram a négyzethurokban? A hurok egy adott pontján összesen mekkora töltés megy át?

Megoldás:

Ekkor a mágneses tér a "jól megszokott módon" a vezetőtől r távolságra $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, amiből kiszámítható a mágneses fluxus a keretben:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_s^{a+s} \mathrm{d}r\,\frac{1}{r} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{a+s}{s}\right) \tag{19}$$

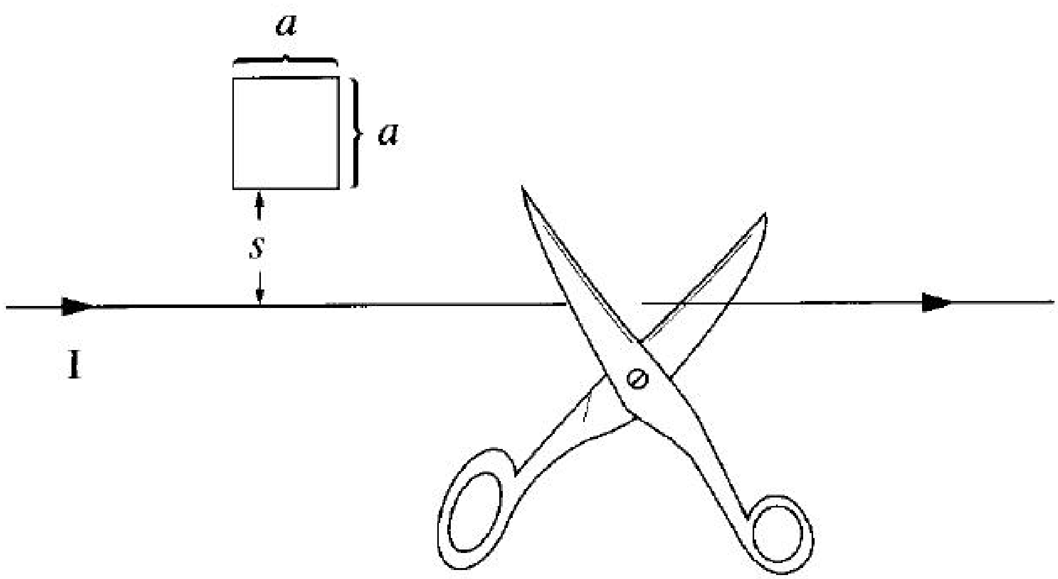

FIG. 2. Elvágott huzal

Ekkor felírva a hurok potenciáljának megváltozásával és ellenállsáával a benne átáramló töltést, majd a potenciálváltozást kifejezve a Faraday-törvény segítségével:

$$I = \frac{\Phi}{R} \Rightarrow \Delta Q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\Phi}{R} = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\dot{\Phi}_B}{R} = \frac{\Phi_B(-\infty) - \Phi_B(\infty)}{R} \equiv \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+s}{s}\right) \tag{20}$$

mivel kezdetben az I áram által keltett fluxus a fentebb kiszámolt érték, míg az elvágás után kellően hosszú idővel, mikor minden mágneses tér lecsengett a fluxus zérus, $\Phi_B(\infty) = 0$.

V. BETATRON (B TÍPUSÚ)

A ciklotron mozgást végző elektronok mozgását fel lehet gyorsítani a mágneses tér növelésével; a keltett elektromos tér csak az érintő irányában okoz gyorsulást. Ez a **betatron** alapelve (3. ábra).

1. Mutassa meg, hogy ezt úgy lehet elérni, hogy a kerületen ható mágneses mező a pályán belülre átlagolt mező felével egyenlő (*Widerøe feltétel*)! Induljon ki abból a feltételezésből, hogy kezdetben a tér nulla, és az eszköz a pálya középpontjára szimmetrikus, továbbá tételezze fel, hogy az elektron sebessége jóval kisebb mint a fénysebesség, így a nemrelativisztikus mechanika alkalmazható!

2. Változik-e valami, ha figyelembe vesszük a relativisztikus mozgást?

Megoldás:
A Lorentz törvény értelmében, ahhoz hogy egy v sebességgel haladó töltött részecske egy R sugarú körpályán maradhasson a következőnek kell teljesülnie:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow B = \frac{mv}{eR} \tag{21}$$

ahol most $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ és alatta az R sugarú körpályán felvett értékét tekintjük.
Továbbá írjuk fel a részecskére ható tangenciális irányú elektromos gyorsító erőt, ami által végzett munkának egyenlőnek kell lennie a Faraday-törvény által indukált potenciálban végzett munkával, amelyet egy teljes kör megtétele esetén fejezünk ki, a feltételünknek megfelelően állandó tangenciális irányú sebesség esetén

$$2\pi R m\dot{v} = -e\Phi = e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B} \equiv eR^2\pi \dot{B}_{\mathrm{avg}} \tag{22}$$

Ahonnan, ha kezdetben nulla volt a mágneses tér, adódik, hogy

$$v = \frac{eR}{2} B_{\mathrm{avg}} \Rightarrow B \equiv B_{\mathrm{avg}}/2 \tag{23}$$

mivel igazából a kapott egyenletet $\dot{v} = \frac{eR}{2}\dot{B}_{\mathrm{avg}}$ alakban írjuk fel, amit kiintegrálunk a kezdeti pillanattól t-ig:

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \dot{v}(t') = v(t) = \frac{eR}{2}\int_0^t \mathrm{d}t' \dot{B}_{\mathrm{avg}}(t') = \frac{eR}{2}(B_{\mathrm{avg}}(t) - B_{\mathrm{avg}}(0)) \Rightarrow v(t) = \frac{eR}{2} B_{\mathrm{avg}}(t) \tag{24}$$

Relativisztikus esetben a relativisztikus impulzus időbeli megváltozása lesz egyenlő az elektromos erővel, ami nem más mint a relativisztikus tömeggel számolt $\frac{m\dot{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ahonnan

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = eE \Leftrightarrow 2\pi R\dot{p} = eR^2\pi\dot{B}_{\mathrm{avg}} \Rightarrow \dot{p} = \frac{R}{2e}\dot{B}_{\mathrm{avg}} \Rightarrow \dot{p} = \frac{eR}{2}\dot{B}_{\mathrm{avg}}, \text{ illetve ekkor } \frac{pv}{R} = evB \tag{25}$$

ami utolsó egyenlőség egyszerűen abból következik, hogy a megnövekedett tömeggel számoltunk, ami megfelel a relativisztikus erőtörvénynek, $\mathbf{F} = m\left(\frac{\mathbf{v}\circ\mathbf{v}}{c^2-v^2} + I\right)\mathbf{a}$, amiből az első tag nulla, hiszen a a vizsgált centripetális gyorsulás definíció szerint merőleges a sebességre $\Rightarrow$ ahonnan $B \equiv B_{\mathrm{avg}}/2$.

VI. DISSZIPÁCIÓ (B TÍPUSÚ)

Egy vasmagos tekercs esetén a tekercs huzalban disszipálódó Joule hőt "rézveszteségnek", a vasmagban (a hiszterézis miatt, fellépő hőt) "vasveszteségnek" hívják a műszaki életben.

Tekintsünk egy olyan elrendezést, ahol az anyag dielektromos tulajdonsága lineáris és izotróp, azaz létezik ϵ_r relatív dielektromos állandó. Ugyanakkor a mágneses viselkedés $M(B)$ ill. $B(H)$ hiszterézist mutat.

1. Az elektromágneses energiamérleget felhasználva Mutassuk meg, hogy az energia-mérlegegyenletben megjelenő **MB** tagot "forrássűrűségként" kell értelmezni. Ez az energia disszipálódik az átmágnesezés során.

2. Mutassuk meg, hogy a B(H) hiszterézis hurok által bezárt terület az egy ciklus során (hő formájában) disszipálódó energiát adja!

Megoldás:

1. Írjuk fel az energia mérleg egyenletet:

$$-\mathbf{JE} = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{H} + \mathrm{div}\mathbf{S},\ \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{26}$$

Az első és második tag a következőképpen fejezhető ki: $\partial_t \frac{1}{2}\left(\varepsilon_r \mathbf{E}^2\right)$, $\dot{\mathbf{B}}\left(\frac{\mathbf{B}-\mathbf{M}}{\mu_0}\right)$, ahonnan a következőképpen írható át a mérleg egyenlet:

$$-\mathbf{JE} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{M} = \partial_t\left(\frac{1}{2}\varepsilon_r\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right) + \mathrm{div}\mathbf{S} \Rightarrow \partial_t w + \mathrm{div}\mathbf{S} + \mathbf{JE} - \dot{\mathbf{B}}\mathbf{M} = 0 \tag{27}$$

ahol a tagok rendre energiasűrűség, energiaáram sűrűség, forrás. De most a forrásban szerepel az $\sim \mathbf{M}$ tag is!

2. A disszipálódó energia a forrásban lévő $\sim \mathbf{M}$-el arányos tag járuléka, azaz

$$\int \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{B}}\mathbf{M} = \oint \mathrm{d}\mathbf{B}\left(\mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\right) = \oint \mathrm{d}\mathbf{B}\,\mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0}\oint \mathrm{d}\mathbf{B}\,\mathbf{B} \tag{28}$$

ahol az utolsó tag nulla, míg az első éppen a kérdéses hiszterézis görbe alatti terület!

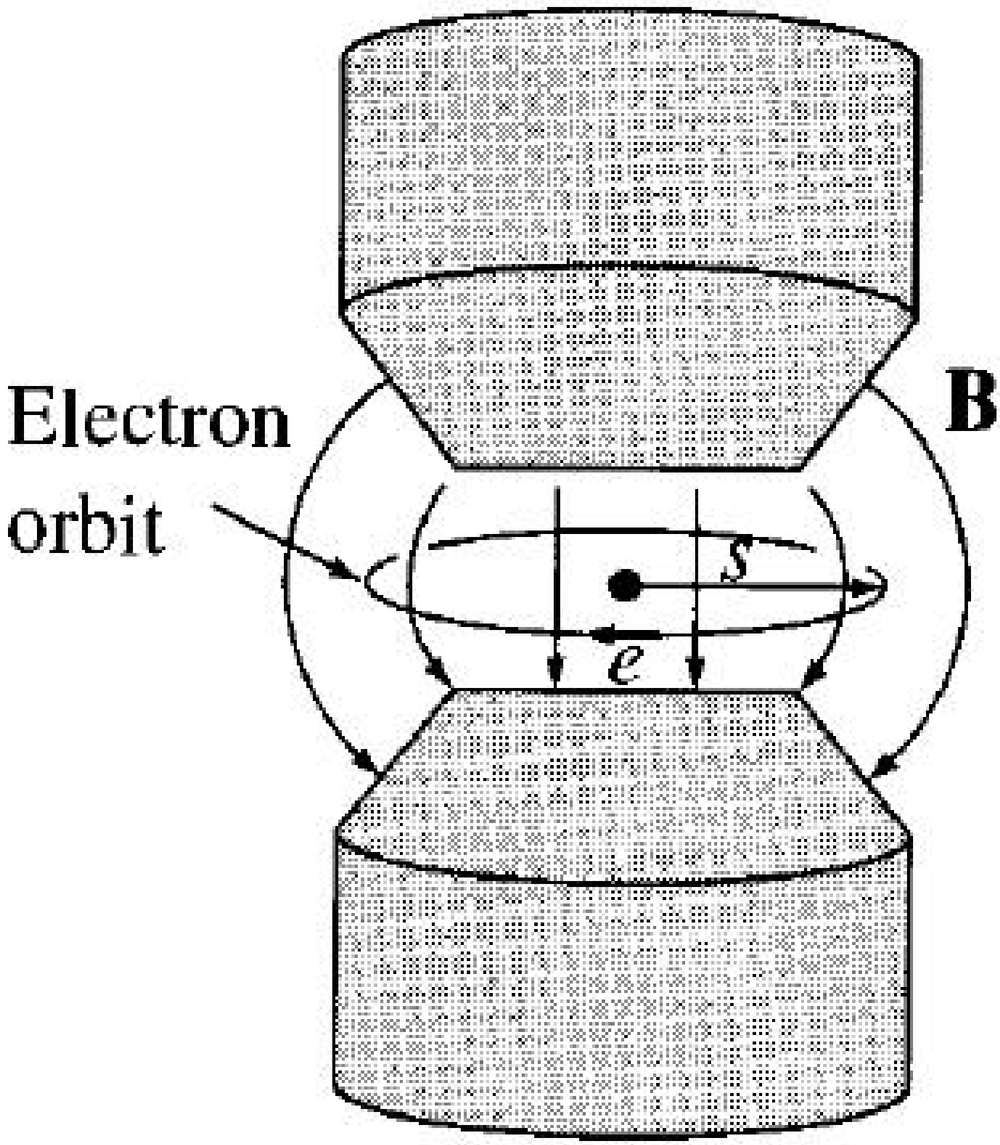

FIG. 3. Betatron alapelve.

VII. BELSŐ ÉS KÜLSŐ ÖNINDUKCIÓ (B TÍPUSÚ)

Adott két végtelen hosszú, egymással párhuzamos, egyforma, körkeresztmetszetű vezeték. A keresztmetszetek sugara r_0, a középvonalak távolsága d. A vezetékekben egymással ellentétes irányban I egyenáram folyik.

1. Határozza meg a $\mathbf{B}$ mágneses teret a vezetékek síkjában, a két vezeték között és számolja ki a vezetékpár a hosszú szakaszán, a vezetékek közötti felület mágneses fluxusát! Ebből határozza meg a hosszegységre eső L_k külső önindukciós tényezőt! Ez a nevét onnan kapta, hogy a mágneses teret csak a vezetéken kívül számoltuk ki.

2. Tekintsünk most egyetlen végtelen hosszú r_0 sugarú körkeresztmetszetű vezetéket és tegyük fel, hogy az I áram

a keresztmetszeten egyenletes sűrűséggel folyik. A vezeték belsejében fellépő **B** mágneses térnek is van energiája, ami kifejezhető az ún. belső önindukciós tényezővel:

$$W_b = \frac{1}{2} L_b I^2 = \int\limits_{bent} \frac{1}{2} \mathbf{H}\mathbf{B} dV \tag{29}$$

Számolja ki a mágneses teret a vezeték belsejében és határozza meg a hosszegységre jutó önindukciós tényezőt!

A két vezeték formálta áramkör teljes önindukciós együtthatóját az így kapott külső és belső önindukciós tényezők összege adja.
Megoldás:

1. A kölcsönös indukciós tényezőhöz meg kell adnunk a két vezeték közötti területre vett fluxust:

$$\Phi_k = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{-d/2+r_0}^{d/2-r_0} \mathrm{d}r \left(\frac{1}{r+d/2} - \frac{1}{r-d/2} \right) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0} \right) \tag{30}$$

   Ahonnan definíció szerint $L_k = \Phi_k / J \Rightarrow L_k = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$.

2. Az önindukciós tényező esetén a vezetőben átfolyó áram álta létrehozott mágneses fluxus és maga az áramnak a viszonyát tekintjük, ahol egeneltes áramsűrűség esetén $\mathbf{j} = \frac{I}{\pi r_0^2} \hat{\mathbf{z}}$, ahonnan az Ampere-törvény alapján:

$$\oint_{\gamma_r} \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 I_r \Rightarrow 2\pi r B = \frac{\mu_0 I}{\pi r_0^2} \pi r^2 \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2 r_0^2 \pi} r \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{31}$$

   Innen a fluxus:

$$\Phi_b = \frac{\mu_0 I a}{2 r_0^2 \pi} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r\, r = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \Rightarrow L_b = \frac{\Phi_b}{I} = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \tag{32}$$

   Ahonnan a teljes önindukciós tényező $L_{\mathrm{tot}} = \frac{\mu_0 a}{\pi}\left(\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right) - \frac{1}{4}\right)$.

   A vezetéken belüli energiát megkaphatjuk az önindukciós tényező alapján, $W_{\mathrm{bent}} = \frac{1}{2} L_b I^2 = \frac{\mu_0 a I^2}{8\pi}$, míg a teljes energia kiszámolható a $W = \frac{I^2 a \mu_0}{8\pi} + \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{r}^3\, \mathbf{B}^2$.