Példák: Mágneses anyagok

I. MÁGNESEZETT GÖMB

A következő példák között vannak olyanok, amelyeket meg lehet egyszerűen határozni a $\mathbf{H} = 0$ (ami igaz, ha nincsenek szabad áramok) egyenlet alapján. Ezekben az esetekben is igazolja az eredményt a skalárpotenciál és a tér explicit kiszámolásával!

1. Ha nincs szabad áram, akkora a $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, így a $\mathbf{H}$-t ki lehet fejezni egy skalárpotenciál gradienseként,
$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M. \tag{1}$$
Ebből az is következik, hogy
$$\nabla^2 \Phi_M = \nabla \cdot \mathbf{M}, \tag{2}$$
azaz Φ_M kielégíti a Poisson egyenletet, úgy, hogy $\nabla \cdot \mathbf{M}$ a forrás. Így lényegében az egész Poisson egyenlet megoldására kitalált technikák érvényesek. Határozza meg egy egyenletes mágnesezettségű gömb terét a változó-szeparációs módszerrel! A gömb sugara legyen R, a mágnesezettsége $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$, és a központja legyen az origóban. Határozza meg a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, mennyiségeket a gömbön belül és kívül!

2. A fenti gömböt $\mathbf{B_0} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ homogén térbe helyezzük. Határozza meg a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ tereket ebben az esetben is. A gömb mágnesezettsége legyen $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$, mint az előző példában, azaz a mágnesezettség ne változzon a külső tér hatására!

3. Adott egy R sugarú gömb amelynek a szuszceptibilitása χ_m. Ezt a gömböt $\mathbf{B_0} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ külső mágneses térbe helyezzük, úgy, hogy a gömb középpontja az origóban van. Határozza meg a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ tereket, valamint a gömb mágnesezettségét $\mathbf{M}$-et is!

4. A fenti esetekben rajzolja fel a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ vektorterek vonalait. A χ_m mágneses szuszceptibilitású gömb esetében rajzoljon külön rajzot a paramágneses és a diamágneses esetekre!
(Megjegyzés: A szupravezető anyagok tökéletes diamágnesek. Hogy néznek ki a térvonalak, ha a gömb szupravezető?)

Megoldás:

1. $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}} \rightarrow \nabla\mathbf{M} = 0 \rightarrow$ Laplace-egyenlet, ahol $\mathbf{M}$ csak a határfeltételt rögzíti, ami a következő, ha az 1-es tartomány a gömbön belüli, míg a 2-es a gömbön kívüli:
$$\Phi_1(R) = \Phi_2(R) \tag{3}$$
$$\Phi_1(r \to 0) < \infty, \;\; \Phi_2(r \to \infty) < \infty \tag{4}$$
$$\partial_r \Phi_1 - \partial_r \Phi_2 \Big|_{r=R} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = M \cos\theta \tag{5}$$
A korábban ismertetett módon felírjuk gömbi korrdintáában az általálános megoldást:
$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{6}$$
$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{7}$$
ahol felhasználtuk az origóban és a végtelenben érvényes határfeltételeket! Továbbá a második határfeltétel miatt ekkor $B_l = R^{2l+1} A_l$. Most felhasználjuk a harmadik feltételt, azaz:
$$\left(A_1 + 2\frac{B_1}{R^3}\right) \cos\theta = M \cos\theta \tag{8}$$

ahol minden más $l > 2$ esetén $A_l,\ B_l = 0$ a határfeltételben megjelenő $\cos\theta$ és a Legendre polinomok fügetlensége miatt!
Beírva az A_1 és B_1 közötti összefüggéseket a következő adódik: $A_1 = \frac{M}{3}$, $B_1 = \frac{R^3 M}{3}$, ahonnan a potenciál:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{M}{3} r\cos\theta = \frac{Mz}{3} \to \mathbf{H}_1 = -\frac{\mathbf{M}}{3} \to \mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}) = \mu_0 \frac{2}{3}\mathbf{M} \tag{9}$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{MR^3}{3}\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{M4\pi R^3}{3}\frac{z}{r^3} \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{mz}{r^3} \to \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} = \frac{m}{4\pi r^3}(3\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{z}}) \tag{10}$$

ahol ismét $\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M}$, a gömb teljes diplólus momentuma.

2. $\mathbf{M}$ változatlan marad, $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{H}_0 = \frac{B_0}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}}$.A szuperpozíció elve alapján a következő képpen fognak módosulni a terek a gömbön belül és kívül:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0 \tag{11}$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{3}\mathbf{M} + \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \tag{12}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} + \mathbf{B}_0 \tag{13}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

3. Ebben az esetben, tudjuk a lineáris összefüggést $\mathbf{H}$ és $\mathbf{B}$ között, illetve a skalárpotenciál deriváltjára vonatkozó összefüggést, továbbá most a külső tér miatt a végtelenben határfeltétel a következő lesz:

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m)\,\mu_0\mathbf{H} \tag{16}$$

$$\mu_r\partial_r\Phi_1(r) = \partial_r\Phi_2(r)\Big|_{r=R} \tag{17}$$

$$\Phi_2(r\to\infty) = -H_0 z \tag{18}$$

$$\Phi_1(R) = \Phi_2(R). \tag{19}$$

Ekkor az egyetlen megkötés, hogy szereplnie kell a külső potenciálban az első Legendre polinomnak, illetve két összefüggés adódik minden l esetén a potenciál folytonossága és a deriváltak közötti lineáris kapcsolat alapán, amiket nem triviális úton $(A_l, B_l \neq 0)$ csak $l = 1$ esetén tudunk kielégíteni, mivel itt van még egy $-H_0 R\cos\theta$ tagunk:

$$A_1 R\cos\theta = \frac{B_1}{R^2}\cos\theta - H_0 R\cos\theta \Rightarrow B_1 = A_1 R^3 + H_0 R^3 \tag{20}$$

$$A_1\mu_r\cos\theta = -\frac{2B_1}{R^3}\cos\theta - H_0\cos\theta = -2A_1\cos\theta - 3H_0\cos\theta \tag{21}$$

$$\Rightarrow A_0 = B_0 = 0,\ A_1 = -\frac{3}{\mu_r + 2}H_0,\ B_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}H_0 R^3 \tag{22}$$

$$\Phi_1(r) = -\frac{3}{\mu_r + 2}H_0 z,\ \Phi_2(r) = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}H_0\frac{R^3 z}{r^3} - H_0 z \tag{23}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{3}{\mu_r + 2}\mathbf{H}_0,\ \mathbf{B}_1 = \frac{3\mu_r\mu_0}{\mu_r + 2}\mathbf{B}_0 \tag{24}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{m}{4\pi}\frac{\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}}{r^3} + \mathbf{H}_0,\ m = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}4\pi R^3 H_0 \sim \text{dipólus} \tag{25}$$

4. Diamágnes: $\mu_r \leq 1$, ideális diamégnes esetén pedig $\mu_r = 0$, ami azt jelenti, hogy a mágneses tér kiszorul az anyagból, vagyis a gömb mágneses anyaga olyan, hogy éppen a külső *szabad áramok* által keltett tér $\mathbf{H}_0$-al ellentétes és ugyanakkora nagyságú mágnesezettséget kelt!

II. MÁGNESES HISZTERÉZIS

Mint az ismeretes, ha mágnesezhető anyagot mágneses térbe helyezünk, akkor abban mágneses dipólmomentum sűrűség indukálódik. Ezt a nem lineáris $M(B)$ görbe adja meg. A szükséges Maxwell egyenletek felhasználásával rajzolja át a megadott $M(B)$ görbét $B(H)$ görbévé!

Megoldás:

Adott $M = M(B)$, ahol továbbá $B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H + M(B))$, ahol most átmenetileg hanyagoljuk el a μ_0-át és ekkor $H = B - M(B)$.

III. LÉGRÉS TOROID TEKERCSBEN

Adott egy nagyon sűrű N menetű toroid tekercs, amelyet egy nemlináris mágnesezhető anyag tölt ki. A toroid középvonalának a hossza l, keresztmetszete F_0. A geometriai arányok olyanok, hogy a keresztmetszet mentén a B mágneses indukció nagysága homogénnek tekinthető és a B érték számítható a toroid középvonalra felírt megfelelő (integrális) Maxwell egyenlet segítségével. A toroid vasmagjában egy (a középvonalra merőleges) $\delta \ll l$ vékony légrés van. A tekercsben állandó nagyságú I_0 áram folyik.

1. Az $M(B)$ ismeretében határozza meg a légrésben a B_0 mágneses indukció nagyságát!

2. A $B(H)$ ismeretében határozza meg a légrésben a B_0 mágneses indukció nagyságát!

Megoldás:

1. Ampere-törvény: $M(B)$ ismert:

$$(l - \delta)\, H + \delta H_0 = N I_0 \tag{26}$$

ahol a δ légrésben a szokásos $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ mágneses tér van jelen. Most felhasználjuk továbbá, hogy B_n folytonos, ami miatt a térben mindenhol B_0 van jelen, a légrésen kívül $B_0 = \mu_0(H + M(B_0))$, ahonnan a következő grafikusan megoldandó egyenlet adódik:

$$\frac{\delta}{\mu_0} B_0 + (l - \delta)\left(\frac{B_0}{\mu_0} - M(B_0)\right) = N I_0 \Leftrightarrow \frac{l}{\delta} B_0 - N I_0 = (l - \delta)\, M(B_0) \tag{27}$$

2. Amikor $B(H)$ ismert $(l - \delta)\, H + \delta \frac{B_0}{\mu_0} = N I_0$, ahol ekkor $B(H) = B_0 = \mu_0(H + M)$, a B_n folytonosság miatt. Ekkor

$$\frac{\delta}{\mu_0} B_0 + (l - \delta)\, H(B_0) = N I_0 \Rightarrow \frac{\delta}{l - \delta} \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{N I_0}{l - \delta} = H(B_0) \tag{28}$$

ahol $H(B_0)$ görbét grafikus invertálással határoztuk meg, illetve ezt az egyenletet ismét meg lehet oldani grafikusan

IV. VÉKONY MÁGNESES LEMEZ TERE

Adott egy vékony h vastagságú, végtelen nagynak tekinthető sík mágneses lemez. A lemezben (a felületre merőlegesen) a homogén mágneses polarizáció $\mathbf{M}$. A lemez anyagának a $B(H)$ görbéje ismert és a térben szabad áramok sehol nem folynak.

1. Az elrendezés szimmetriája és a $\mathbf{B}$ határfeltételeinek az ismeretében, adja meg a $\mathbf{B}$ mágneses indukciót mindenhol a térben!

2. Adja meg a $\mathbf{H}$ mágneses térerősséget mindenhol a térben!

Megoldás:

1. A rendszerszimmetriája miatt $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}} = B(H)\,\hat{\mathbf{z}}$, mivel $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ és szabad ármok hiányában más irányú nem lehet a tér! Ekkor B folytonos lesz határon, mert a határon csak normális komponense van. A lemezen kívülegyszerűen $B_2 = \mu_0 H_2$, illetve ekkro a lemezen belül a $\mathbf{H}$-nak ugrása van $H_2 - H_1 = M$, míg az indukció folytonos $B_1 = B_2$:
$$B_2 = \mu_0 H_2,\ H_2 - H_1 = M \tag{29}$$
$$B_1 = \mu_0(H_1 + M) = \mu_0\left(\frac{B_2}{\mu_0} - M + M\right) \tag{30}$$
$\mathbf{H}$-nak ugrása van a felületen, $\sim \mathbf{M}$, míg $\mathbf{B_1} = \mathbf{B_2} = \mathbf{M}$, illetve $\mathbf{H_1} = \mathbf{0}$, amit az ugrás visz fel $\mathbf{H}_2$-be! Illetve a két lemez között valóban $B_1 = \mu_0 M$ valóban teljesül, mivel $B_1 = B_2$-t minden áramelrendezés együttesen kelti, belevée mind a szabad, mind a polarizált áramhutokokat, melyekből az előbbi nincs jelen rendszerben!

V. DIAMÁGNESESSÉG NAÍV MODELLJE

Vegyük egy elektron pályáját az atommag körül körpályának. Az elektront magát vegyük egy köráramnak:
$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}, \tag{31}$$
azaz a pályához rendelhető dipólmomentum
$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} evR\hat{\mathbf{z}}. \tag{32}$$
A keringő elektronra hat az atommag vonzereje, azaz
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}. \tag{33}$$
Ha az anyagot mágneses térbe helyezzük, egy további erő, a Lorentz erő is hat az elektronra, így
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R}, \tag{34}$$
ahol $\tilde{v}$ a mágneses erő hatására módosult sebesség.

1. Mutassa meg, hogy ha $\Delta v = \tilde{v} - v$, akkor
$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e}. \tag{35}$$
Írja fel a dipólmomentum változását ($\mathbf{\Delta m}$) is, a mágneses tér ($\mathbf{B}$) függvényében!

2. A fenti modell alapján adjon egy becslést a réz szuszceptibilitására (χ_m)! A mért érték $\chi_m = -9.7 \times 10^{-6}$, *Handbook of Chemistry and Physics*, 67th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1986).

Megoldás:

1. Elektronok körárama, mint klasszikus részecskék körmozgása, $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$, amihez $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}}$, míg a keringő elektronra ható vonzóerő az atommag által $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}$, amihez még a Lorentz erő is társulhat, összességében a következőt adva:
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R} \tag{36}$$
A mágneses tér nélküli sebesség könnyedén megadható $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}$, míg $\tilde{v}$ a következőképpen adható meg egy másodfokú egyenlet megoldásaként:
$$\tilde{v} = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R m_e}} \approx \frac{eBR}{2m_e} + \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}, \tag{37}$$
ahonnan $\Delta v \approx \frac{eRB}{2m_e} \Rightarrow \mathbf{\Delta m} = -\frac{1}{2}e\Delta vR\hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2BR^2}{4m_e}\hat{\mathbf{z}}$.

2. Ehhez szükségünk van a réz anyagsűrűségére, ami $\mathcal{N} \approx 10^{30}\ 1/m^3$, ahonnan $\mathbf{\Delta M} = \mathcal{N}\mathbf{m} \Rightarrow \chi_m \sim \mu_0 \mathcal{N} \mathbf{\Delta m} \sim \mu_0 \mathcal{N} \frac{e^2 R^2}{m_e}$, ahol $R \sim 1,35\,10^{-10} \Rightarrow \chi_m \sim 5 \times 10^{-6}$.