Példák: Magnetosztatika, mágneses anyagok

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. Mágneses dipólus:
A áram elrendezéstől kellően messze, $r \gg d$, ahol d az áram elrendezés átmérője, távolságra vizsgálva a mágneses vektorpotenciált az első rendű tag $\sim \frac{1}{r}$ kiesik sztatikus esetben $\Leftrightarrow$ $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho = 0$, míg a másorendű tagot $\sim \frac{1}{r^2}$ nevezzük mágneses dipólusnak

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{2}$$

Vékony egyenes vezető esetén, ahol $\mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathrm{d}\mathbf{r}\,I$:

$$\mathbf{m} = I\int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r} \Rightarrow \text{ zárt görbe esetén: } \mathbf{m} = I\int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \tag{3}$$

2. Mágneses skalárpotenciál:
Megszorítva vizsgálódásunkat arra térrészre, ahol $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, az elektrosztatikus potenciál mintájára bevezethetjük a mágneses skalárpotenciált:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi_m \tag{4}$$

azonban, ha ezt olyan térrészben tesszük, mely nem egyszeresen összefüggő, azaz van benne egy szingularitás, azaz a tartományt keresztezi egy áram, akkor gondoskodnunk kell a skalárpotenciálnak egyrészt az egyértékűségéről, illetve arról, hogy legyen benne egy ugrás, amivel visszakapjuk az Ampere törvényt:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{H} = -\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\nabla\Psi_m = \Psi_m(\mathbf{r}_0 - 0) - \Psi_m(\mathbf{r}_0 + 0) \equiv \mu_0 I \tag{5}$$

ahol $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges kezdőpont a zárgörbén és a ± 0 jelölés indikálja, hogy történt egy ugrás a függvény értékében a zárt görbe mentén, amely definíció szerint arányos a körbezárt árammal.
Jó példa erre a végtelen egyenes vezető:

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{6}$$

$$\Psi_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\varphi \tag{7}$$

Ekkor telejsül, hogy $\mathbf{H} = -\nabla\Psi_m$, illetve az is, hogy tetszőleges az origót/áramot körbezáró görbe mentén vett integrálja $-\nabla\Psi_m$-nek éppen $\Psi_m(0) - \Psi_m(2\pi) = \mu_0 I$, mindazonáltal, hogy a skalárpotenciál továbbra is egyértékű!

3. Mágneses tér anyag jelenlétében:
A legalacsonyabb rendű közelítés a mágnesezhető anyagok modellezésére, egy mágneses dipólsűrűség bevezetése:

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{8}$$

Ekkor a teljes mágneses tér szétválaszható a szabad áramok által keltett tér és a polarizált áramok átlal keltett tér összegére:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9}$$

ahol definíció szerint

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}_{\mathrm{tot}} \tag{10}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{sz}} \tag{11}$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\mathrm{pol}} \tag{12}$$

Továbbá a határfeltételek ekkor egy tetszőleges mágnesezhető anyag S határán $\mathbf{n}$ normálvektorral az adott felületi pontokban:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_b) = 0 \Leftrightarrow B_n \text{ folytonos} \Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{13}$$

$$\mathbf{H}_k - \mathbf{H}_b = \mathbf{K}_{\text{sz}}\times\mathbf{n} \Leftrightarrow H_t \text{ folytonos, ha nincsenek felületi szabad áramok } \Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{sz}} \tag{14}$$

II. KÖNYVTÁMASZ ALAKÚ HUROK MÁGNESES DIPÓLMOMENTUMA

Adott az ábrán látható vezető alakzat (hurok), amelynek minden éle w hosszúságú. A hurokban I áram folyik. Határozza meg az áramvonal mágneses dipólmomentumát!

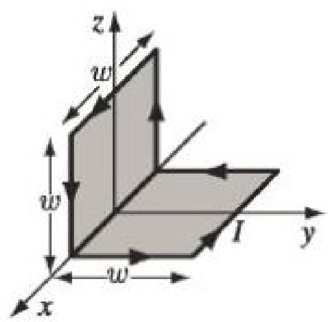

FIG. 1.

Megoldás:
Alkalamzzuk a mágneses dipólusra levzetett formulát egy köráram esetén:

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{r} = I\oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{r} = I\int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \tag{15}$$

Ahol az utolsó esetben tetszőleges felület esetén az infinitezimális felületdarab *vektorokat* is összegeznünk kell! Esetünkben alkalmazzuk a szuperpozíció elvét, amikor is veszünk egy-egy *zárt xz* és *xy* síkbeli téglalapot, amik területe $w^2/2$ és irányuk $\hat{\mathbf{x}}$, illetve $\hat{\mathbf{z}}$ a kettő elrendzés szuperpozíciójában éppen kiesik x tengelyen folyó áram, ami visszadja az eredeti elrendezést, illetve az egyes darabok mágneses dipolmomentumai az előadáson tanultak alapján egyszerűen csak a felület normálisával párhuzamos irányú és az áram, illetve felület nagyságának szorzatával megeggyező hosszúságú vektor, mivel $\oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{r} = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}$

$$\mathbf{m} = Iw^2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) \tag{16}$$

III. KÖRÁRAM

Adott egy R sugarú, köralakú áramvezető, amelyben I áram folyik. A körvonal forgástengelye a z tengely, a kör centruma az origó.

1. A Biot-Savart törvény alkalmazásával határozza meg a $\mathbf{B}$ térerősséget a z tengely mentén!
2. A $\mathbf{B}$ ismeretében határozza meg a mágneses skalárpotenciált $\Psi_m(z)$-t a tengely mentén!
3. Vizsgálja meg a $\Psi_m(z)$ egyértékűségét a z tengely mentén és a $\pm\infty$ limeszekben!

Megoldás:

1. A korábbi gyakorlaton kiszámolt módon ismét határozzuk meg a mágnese teret a z tengely mentén: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$, illetve $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = z\,\hat{\mathbf{z}} - R\,\hat{\mathbf{r}}$, ahonnan a Biot-savart törvény a következőt adja a z tengely mentén:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\hat{\varphi}\times(z\,\hat{\mathbf{z}} - R\,\hat{\mathbf{r}})}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\mu_0 IRz}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \tag{17}$$

2. Most vegyük a mágneses skalárpotenciált, ami az elektrosztatikában ismert módon a $\mathbf{B} = -\nabla\Psi_m$ összefüggés által adható meg, $\Psi_m(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I z}{2\sqrt{z^2+R^2}}$, mivel

$$\Psi_m(z) = -\frac{\mu_0 I}{2}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{R}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{z'}{R}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{2}\int_0^x \mathrm{d}x' \frac{1}{\left(1+(x')^2\right)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{2}\int_0^{\mathrm{ash}(x)} \mathrm{d}y \frac{1}{\cosh^2 y} = -\frac{\mu_0 I}{2}\tanh(y)\Big|_0^{\mathrm{ash}(x)}$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \tag{18}$$

3. Körbeintegrálva egy olyan zárt görbe mentén a mágneses indukciót, ami tartalamzza az áramot vagyis a skalárpotenciál gradiensét, szükségszerűen $\mu_0 I$-t kell kapnunk, ehhez be kell vezetnünk egy ugrást a skalárpotenciálban, amit a $\pm\infty$ határokon a következő módon tudunk elérni, felhasználva, hogy $\Psi(\pm\infty) = \mp\frac{\mu_0 I}{2}$

$$\Psi_m(\infty) - \Psi_m(-\infty) = -\mu_0 I \tag{19}$$

vagyis a $\pm\infty$-ben vett ugrása a függvénynek éppen visszaadja a várt áramot és azt, hogy igazából a mágneses tér, bár egy skalárpotenciállal írtuk fel nem *rotációmentes*.

IV. MÁGNESEZETT GÖMB

Adott egy R sugarú gömb. amelyben homogén és állandó $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ mágnesezettségű permanens mágneses anyag van (ún.: "gömbmágnes"). Ennek mágneses tere ismert.

A gömbön belül (legyen ez a 2-es tartomány):

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{M}, \qquad \mathbf{B}_2 = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M}. \tag{20}$$

A gömbön kívül (legyen ez az 1-es tartomány) a mágneses skalár potenciál egy $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ pontszerű dipólus terével adható meg, azaz

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\theta}{r^2}. \tag{21}$$

Ahol (r, θ, ϕ) gömbi koordináták. Valamint

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M}. \tag{22}$$

1. Helyezzük el ezt a gömbmágnest egy $\mathbf{B_0} = \mu_0\mathbf{H_0} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ homogén mágneses térbe úgy, hogy az $\mathbf{M}$ ne változzon meg (permanens mágnesről van szó)! Határozzuk meg az eredő $\mathbf{B}$-t és a $\mathbf{H}$-t a gömb belsejében!
2. Legyen most a gömbmágnes anyaga egy lineárisan mágnesezhető anyag, azaz amelyre igaz, hogy $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$. Az első kérdésre adott válasz ismeretében határozza meg az $\mathbf{M}$ és a $\mathbf{B_0}$ közötti kapcsolatot!
   Megjegyzés: A kapott összefüggés elektroszatikus analógiájával már találkoztunk a Clausius-Mosotti egyenlet tárgyalásakor.
3. Vizsgáljuk meg, hogy a második kérdésben tárgyalt elrendezésnél mi a kapcsolat a gömbmágnes belsejében lévő $\mathbf{B}$ és a $\mathbf{B_0}$ között paramágneses és diamágneses anyag esetén! Vázoljuk fel a mágneses indukcióvonalakat!

Megoldás:

1. Tudjuk, hogy mágneses anyag esetén a következő összefüggés áll fent:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{23}$$

Esetünkben a teljes mágneses indukció, a mágnesezettségből adódó járulék és a külső tér szuperpozíciójából ered:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0 = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0 \tag{24}$$

Innen, mivel a gömb mágnesezettsége nem változik meg egyszerűen megadható a mágneses térerősség:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{25}$$

2. Esetünkben csak ki kell fejezni $\mathbf{B}_0$ és $\mathbf{M}$ kapcsolatát:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\left(\mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0\right) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_0(2+\mu_r)}\mathbf{B}_0 \tag{26}$$

3. Most az előző összefüggést $\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}_0$-re írjuk fel:

$$\mathbf{B} = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0 = \frac{3\mu_r}{2+\mu_r}\mathbf{B}_0 \tag{27}$$

Paramágnes esetén $\mu_r \geq 1$, vagyis $B \geq B_0$, egy erősebb mágneses teret kapunk vissza, míg diamágnes esetén, $\mu_r \leq 1 \Rightarrow B \leq B_0$, gyengébb tér adódik vissza!

V. A VEKTORPOTENCIÁL HATÁRFELTÉTELELEI

1. Ismert az $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ mágneses vektorpotenciál Coulomb mértékben. Írja fel két mágnesezhető közeg határán az $\mathbf{A}(\mathbf{r})$-ra vontakozó határfeltételeket!

2. Írjuk fel a vektorpotenciált az előző feladatban megoldott mágnesezett gömbre a gömbön belül és kívül! Mutassuk meg, hogy teljesülnek rá a határfeltételek!

Megoldás:

1. Coulomb mértékben, $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, írjuk fel egy h magasságú, $\mathrm{d}A$ infinitezimális alapterületű térglatestre, mely magában foglalja a teljes hossza mentén a határfelületet, a vektorpotenciál felületi integrálját:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{28}$$

Most véve a $h \to 0$ határesetet, a következő adódik:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{A} \to \mathrm{d}A\mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_b) = 0 \tag{29}$$

ahol $\mathbf{n}$ az adott egy pontra konvergáló téglatestnél a felület normális vektora, $\Rightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{A} = A_n$ folytonos! Egy további határfeltételt tudunk megadni, ha most tekintjük a vektorpotenciál rotációját és az mágneses indukcióra érvényes határfeltételt:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = B_n \text{ folytonos} \Rightarrow \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} \text{ folytonos} \tag{30}$$

Ekkor vegyünk ismét egy $\mathrm{d}A$ infinitezimális felületdarabot a határon, mely teljes hosszán keresztül tartalamzza a határfelületet és írjuk fel a $\mathrm{d}A$ alapterületre a Stokes tételt, majd a téglalap egyik oldalálva tartsunk nullába, $h \to 0$:

$$\begin{gathered}\int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\operatorname{rot}\mathbf{A} = \oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A},\ h \to 0\\ \Rightarrow \mathrm{d}A\,\mathbf{n}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{A}_k - \operatorname{rot}\mathbf{A}_b) = 0 = \mathbf{t}\cdot(\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_b)\end{gathered} \tag{31}$$

ahol $\mathbf{t}$ a tangenciális irányú egségvektor az adott pontban, vagyis A_t is folytonos!

2. Az előző probléma vektorpotenciálja :

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{A}_2 = A_2(r)\,\hat{\varphi} \Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{A}_2 = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_2(\rho)) = \frac{2}{3}\mu_0 M \Rightarrow \partial_\rho(\rho A_2(\rho)) = \frac{2}{3}\mu_0 M\rho\\ \Rightarrow A_2(\rho) = \frac{\mu_0 M}{3}\rho \Rightarrow \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 m\rho}{4\pi R^3}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 m\sqrt{x^2+y^2}}{4\pi R^3}\hat{\varphi}\end{gathered} \tag{32}$$

ahol bevezettük a mágneses dipólus sűrűséget, $\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M}$, illetve most bevezettük az "szokásos" jelölést a henger koordináta rendszerbeli sugárra, $\hat{\rho} = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Kívülről a gömb definíció szerint egy az $\mathbf{m}$ által jellemzett mágneses dipólusnak látszódik, aminek a vektorpotenciálja definíció szerint:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\rho}{r^3}\hat{\varphi} \tag{33}$$

ahol most $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ "szokásos" gömbi koordinátarendszerbeli sugár, $\mathbf{r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$. Látható, hogy a vektorpotenciálnak a felületen csak tangenciális komponense van, ami folytonos $r = R$-ben, míg a mindenhol zérus normális komponensre triviálisan teljesül mindenhol a folytonosság.

VI. SÍKLAP ÉS DIPÓLUS

Egy $2a$ vastagságú síklapban $\mathbf{J} = J_0\hat{\mathbf{z}}$ áram folyik. A síklapot felezi az yz sík, azaz $x = -a$ és $x = a$ síkok között van. Egy mágneses dipólus $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{x}}$ van az origóban.

1. Határozza meg a dipólusra ható erőt!
2. Határozza meg a dipólusra ható erőt, ha a dipólmomentum $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$!
3. Az elektrosztatikus esetben $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$ és $\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}$ ekvivalensek, de ez nem igaz a mágneses analógjukra. Miért? Számolja ki a $(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ kifejezést a fenti két esetre!

Megoldás:

1. Először az indukció vektort határozzuk meg! Tudjuk, hogy egy x-re, merőleges síkban, $x = a$-ban átfolyó felületi áramsűrűség által keltett tér $\sim \mathbf{B} = \mu_0 K \mathrm{sgn}(x-a)\ \hat{\mathbf{y}}$, ahol $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{z}} \equiv J_0 \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{z}}$. Ezeket felösszegezve egyszerűen a síkon kívüli tér:

$$\mathbf{B}_k = \mu_0 J_0 a \mathrm{sgn}(z)\ \hat{\mathbf{y}},\ \text{ha } |x| \geq a \tag{34}$$

   Míg a belső tér hasonló módon számolható, ki de figyelembe kell vennünk, hogy egy adott x pontban a két oldalon folyó áramok ellentétes irányú teret keltenek, vagyis ekkor összesen egy $2x$ magasságú térfogat tartomány fogja jelenteni a különbséget:

$$\mathbf{B}_b = \mu_0 J_0 x\,\hat{\mathbf{y}} \tag{35}$$

   Most kiszámoljuk ez alapján és az előadáson levezetett formula segítségével az origóba helyezett $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$ dipólusra ható erőt:

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_b) \Rightarrow F_i = m_k\partial_i(B_b)_k\Big|_{\mathbf{r}=0} = m_k\mu_0 J_0\delta_{k,2}\delta_{i,2} = 0 \tag{36}$$

   mivel $\mathbf{m}$-nek csak x irányú komponense van, $m_k = \delta_{k,1}m_0$.

2. $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$ irányú dipólus esetén triviálisan

$$F_i = m_k\mu_0 J_0\delta_{k,2}\delta_{i,2} = m_0\mu_0 J_0\delta_{i,2} \Rightarrow \mathbf{F} = m_0\mu_0 J_0\,\hat{\mathbf{y}} \tag{37}$$

3. Elektrosztatikában egy töltéseloszlásra ható erő általános kifejezéséből kiindulva a következő módon tudjuk megadni az oriban lévő dipólusra ható erőt egy tetszőleges külső tért esetén

$$F_i = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,E_i(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})(E_i(0) + r_l\partial_l E_i(0)) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ = QE_0(0) + (\mathbf{p}\nabla)\,E_i(0) \tag{38}$$

   A feladatban kiírt egyenlőség a következő módon látható be:

$$p_l(\partial_l E_i - \partial_i E_l) = p_l\varepsilon_{lik}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_k = 0 \tag{39}$$

mivel az elektromos tér rotáció mentes, vagyis $p_l \partial_l E_i = p_l \partial_i E_l \Leftrightarrow (\mathbf{p}\nabla)\,\mathbf{E} = \nabla(\mathbf{pE})$. Látható, hogy ha elvetjük a rotációmentességet, akkor a fenti állítás nem lesz igaz! Vagyis magnetosztatika esetén nem igaz, hogy $(\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} = \nabla(\mathbf{mB})$, ahol ismét felírhatjuk a dipólusra ható erőt egy általános árameloszlásból származtatva tetszőleges külső elektromos tér esetén:

$$F_i = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \cdots = \partial_i m_l B_l \equiv \partial_i(\mathbf{mB}) \tag{40}$$

illetve a fentebbi érvelés valóban nem állja meg a helyét, mivel

$$m_l(\partial_l B_i - \partial_i B_l) = m_l \varepsilon_{lik} (\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_k = \mu_0 m_l \varepsilon_{lik} J_k \Leftrightarrow (\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} - \nabla(\mathbf{mB}) = \mu_0\,\mathbf{J} \times \mathbf{m} \tag{41}$$

A mi esetünkben a két dipólus irányra:

$$(\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} = \begin{cases} m_0 \partial_x \mu_0 J_0 x \hat{\mathbf{y}} = m_0 \mu_0 J_0 \hat{\mathbf{y}}, \;\; \mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{x}} \\ m_0 \partial_y \mu_0 J_0 x \hat{\mathbf{y}} = 0, \;\; \mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{y}} \end{cases} \tag{42}$$

Láthatóan éppen fordított módon kapjuk meg az eredményeket!