Példák: Magnetosztatikai alapok

Megjegyzés: az összes konkrétan kiszámolt vektorpotenciálról és mágneses mezőről érdemes rajzot készíteni!

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

- Biot-savart törvény

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$

Kihasználva, hogy $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2}$$

Előadáson tanultakból ilyenkor rögtön következik, hogy $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Azonban, mivel az egyetlen dolog, ami fizikai tartalommal bír a $\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}$, ezt azonban nem csak a fenti vektorpotenciál elégíti ki, mivel tetszőleges χ skalártér esetén $\nabla\times(\nabla\chi) = 0$, azaz mindig élhetünk egy *mértékszabadsággal*

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi \tag{3}$$

A Biot-Savart törvényből levezetett képlet fontos további tulajdonsága, hogy $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$, illetve $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$. Továbbá a vektorpotenciál fenti speciális alakjából rögtön látható, hogy

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4}$$

- Fordított irányból vizsgálva a mágneses teret a következőt mondhatjuk: feltesszük, hogy tudjuk $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ és $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$, amiből rögtön következik, hogy kereshető

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{5}$$

alakban. Azonban ebből még korántsem következik, hogy $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, csupán ismét azt tudjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ teljesíti a megkövetelt összefüggést. Coulomb mértéknek nevezzük, amikor teljesül a $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ összefüggés. Ekkor felhasználva a szintén előre ismert $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$ összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \Rightarrow \Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{6}$$

amely Poisson egyenlet partikuláris megoldását egyszerűen meg tudjuk adni

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{7}$$

- Biot-Savart törvény egyenes vezető esetén, $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{d}\mathbf{r}'I$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{8}$$

II. A VEKTORPOTENCIÁL REKONSTRUKCIÓJA

Vegyük észre a formális analógiát a magnetosztatika Maxwell-egyenletei

$$\text{rot}\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \text{div}\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9}$$

és a vektorpotenciálra Coulomb-mértékben érvényes összefüggések:

$$\text{rot}\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \qquad \text{div}\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{10}$$

között!

1. Írja fel a Biot-Savart törvény analógját arra, hogyan lehet a vektorpotenciált előállítani a mágneses mező ismeretében!
   Megoldás:
   Tudjuk, hogy egy $\mathrm{d}\mathbf{r}'$ infinitezimális nagyságú szakaszban átfolyó áram a következő mágneses teret kelti:
$$\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{11}$$
   Amit, ha úgy írunk fel, hogy a szakasz darab árama egy $\mathrm{d}A'$ felületen átfolyó $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ felületi áramsűségből ered és összegzünk a vizsgált elrendezés minden szakasz darabjára, a következőt kapjuk:
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{12}$$
   Ezzel analóg módon adható meg a vektorpotenciál, ahol csak le kell cserélnünk a $\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r})$ tagot $\mathbf{B}(\mathbf{r})$-re:
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{13}$$

2. Mi az Ampere-féle gerjesztési törvény megfelelője?
   Megoldás:
   Az Ampere-törvény az integrális alakja a Biot-Savart törvénynek:
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mu_0 I \tag{14}$$
   Ismét lecserélve a $\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r})$ tagot $\mathbf{B}(\mathbf{r})$-re a következő analóg kfejezést kapjuk:
$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{15}$$

III. VÉGTELEN HOSSZÚ SZOLENOID ÉS TOROID

Adott egy R sugarú, kör keresztmetszetű szolenoid, melynek tengelye a z koordinátatengely. A végtelen hosszúnak vehető tekercs belsejében a mágneses térerősség ismert és homogénnek tekinthető, az egységnyi hosszra eső menetszáma pedig n.

1. Mennyi a mágneses indukció a tekercs belsejében és azon kívül?
2. Határozza meg a vektorpotenciált a tekercsen belül és kívül! Készítsen ábrát a mágneses mezőről és a vektorpotenciálról!
3. Számolja ki a vektorpotenciál rotációját a tekercsen belül és kívül! Értelmezze az eredményt!
4. Tegyük fel, hogy a szolenoid keresztmetszete nem kör alakú! Mutassa meg, hogy a mágneses tér a mágneses tér egy végtelen hosszú szolenoidon belül a tengellyel párhuzamos, a keresztmetszet alakjától függetlenül. Mekkora a tér nagysága kivül, illetve belül?
5. Határozza meg egy toroid tekercs (zárt kör alakba hajlított szolenoid) mágneses terét! Homogén-e ez a mező?

Megoldás:

1. A mágneses tér a mi közelítésünkben állandónak és z irányúnak vehető, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B\hat{\mathbf{z}}$. Ekkor használjuk az Ampere-törvényt a tér nagyságának meghatározásához, amihez tekintsük azt a γ zárt görbét, ami párhuzamos a z tengellyel és a merőlegesen folytatódik a tekercsen kívül, majd a másik párhuzamos része nagyon messze van a tekercstől, annak érdekében, hogy a tekercsen kívüli részein nullának vehessük jó közelítéssel a mágneses teret:
$$\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = LB = \mu_0 LnI \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 nI\hat{\mathbf{z}} \tag{16}$$

A tekercsen kívüli teret pedig egy olyan γ görbére való vonalintegrállal adhatjuk meg, ahol a görbe egy $r > R$ sugarú koncentrikus kör és merőleges a z tengelyre. Ekkor az átfolyó áram egyszerűen csak a tekercsen végig folyó I árammal egyenlő:

$$\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \tag{17}$$

ahol $\hat{\varphi} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, illetve a rendszer szimmetriája miatt feltehettük, hogy ekkor $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \parallel \hat{\varphi}$.

2. A vektorpotenciálhoz alkalmazzuk az Ampere-törvény analógját a tekercsen belül egy $r < R$ sugarú körre:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 2\pi r A_\varphi = \pi r^2 B \Rightarrow A_\varphi = \frac{rB}{2} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 n I r}{2}\hat{\varphi},\ \text{ha } r < R, \tag{18}$$

illetve ki kell számítanunk ehhez még a tekercsen kívüli $\hat{\varphi}$ irányú térből eredő vektorpotenciált is, nevezzük ez utóbbit $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$-nek, ami azonban a terkecsen belül független r-től és csak egy konstans eltolást okoz a vektorpotenciálban, amit rögzít a folytonossági határfeltétel. A tekercsen kívül, $r > R$ esetén figyelembe kell vennünk mind a tekecs teljes $\pi R^2 B$ fluxusát, ami ad egy $\frac{\mu_0 n I R^2}{2r}\hat{\mathbf{z}}$ járulékot, a z irányú tagban, mind a mostmár r függő járulékot, ami a B_φ-ből adódik

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = L A_z = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}'\,\mathbf{B}(\mathbf{r}') = L\int_r^\infty \mathrm{d}r'\,B_\varphi = L\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow A_z(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \tag{19}$$

ahol a logaritmusban lévő konstanst úgy válaszottuk meg, hogy a vektorpotenciál z komponense folytonosan tűnjön el az $r = R$-ben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{z}} + \frac{\mu_0 n I R^2}{2r}\hat{\varphi} \tag{20}$$

3. A rotáció számoláshoz használjuk a rotáció henger koordináta rendszerbeli alakjával:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi\right)\hat{\rho} + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)\,\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho A_\varphi) - \partial_\varphi A_\rho)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{21}$$

A tekercs belsejében csak A_φ komponensünk van, ami csak r-től függ, azaz a rotációból csak az $\frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi) = \mu_0 n I$ tag fog megmaradni, ami z irányú és így helyesen visszkaptuk a mágneses teret belül! Most a külső tartományban az $\frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi) = 0$ helyesen zérust ad, míg a $-\partial_r A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ami a rotáció képlete alapján $\hat{\varphi}$ irányú, ami egyezik a korábban kapott mágneses térrel.

4. Nem kör keresztmetszetű, de végtelen hosszú szolenoid esetén az Ampere törvényt ugyanarra a γ görbére felírva, mint a köralakúnál ugyanazok a közelítések működnek. Ugyanígy a szolenoidon kívül az Ampere-törvényben csak az $r > R$, ahol most R a szolenoid maximális szélessége, kör által körbezárt áramot kell tekinteni.

5. Toroid tekercs esetén, aminek a belső sugara a, ha $r < a$ visszakapjuk a sima I áramú körvezető esetét, ahol egy $R\mathrm{d}\varphi$ $\hat{\varphi}$ irányű szakasz árama a kör középpontjában

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R} \tag{22}$$

infinitezimális z irányú járulékot ad, amit he felösszegzünk a szög szernt a teljes eredmény:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{\mathbf{z}} \tag{23}$$

Szintén az $a \gg R$ határesetben a toroid belsejében egyszerűen egy $a < r < a + R$ sugarú körre írjuk fel az Ampere-törvényt, ami a következőt adja:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi r B = 2\pi a n \mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I n a}{r}\hat{\varphi} \tag{24}$$

Az $R \ll a$ határeset egyben ekkor azt is indikálja, hogy a toroidon kívül, $r > a + R$ nincs mágneses terünk, mivel a toroidban egymással ellentétesen folyó áramok az $a \ll R$ feltétel miatt "nagyon közel vannak egymáshoz", így minden a nagyságrendű pontban a járulékuk jó közelítéssel kiejtik egymást!

IV. EGYENES ÁRAMVONAL

Adott a z-tengely mentén egy végtelen hosszú egyenes I áramvonal.

1. Írja fel a vektorpotenciál integrálkifejezését és számítsa ki az eredményt! (Segítség: érdemes észrevenni a vonaltöltéssel való analógiát!)
2. Határozza meg a vektorpotenciál ismeretében a mágneses indukciót!

Megoldás:
A vektorpotenciál kifejezhető az elektromos potenciállal analóg módon Coulomb mértékben, $\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$, a következő módon:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{25}$$

Esetünkben $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = I\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$, ahonnan az integrál a vonaltól r távolságra a következő alakot ölti:

$$A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\operatorname{ash}(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{26}$$

Látható módon ez az integrál nem függ r-től, illetve a két határértékben az eredmény végtelen, ami egy teljesen téves eredmény, mivel tudjuk, hogy ennek a vektorpotenciálnak a rotációja egy nem zérus és véges mágneses teret kell, hogy adjon! A hiba onnan ered, hogy a vonal végtelensége miatt bejöhettek végtelen nagy konstansok a kifejezésbe, amik "elfedték" a valós r függést!
Vegyünk egy $2L$ hosszúságú vonalvezetőt, ahol most az integrál a következő alakot ölti, amikor r távolságra és z magasságban akarjuk megadni a vektorpotenciál értékét:

$$A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}z'\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-(L-z)/r}^{(L-z)/r}\mathrm{d}z'\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\operatorname{ash}((L-z)/r) - (\operatorname{ash}(-(L-z)/r)))$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{(L-z)+\sqrt{(L-z)^2+r^2}}{-(L-z)+\sqrt{(L-z)^2+r^2}}\right) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\ln\left(4(L-z)^2+r^2\right) - \ln\left(r^2/(L-z)^2\right)\right) \approx -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r/L) \tag{27}$$

Ekkor láthatóan teljesülni fog a vektorpotenciál és a mágneses tér közötti öszefüggés, hiszen esetünkben, amikor csak az $A_z(r)$ komponens nem zérus, $\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\partial_r A_z\hat{\varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\partial_r\ln(r/L) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$.

V. KÖRALAKÚ ÁRAMHUROK TERE A TENGELYE MENTÉN

Adott az xy-síkban egy R sugarú, köralakú áramhurok, amelyben I áram folyik. A kör középpontja az origóban van. Határozza meg a vektorpotenciált és a mágneses indukciót a z tengely mentén!
Megoldás:
Használjuk ismét a vektorpotenciálra a korábban levezetett integrál kifejezést, ahol most $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = IR\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi}$, illetve a z tengely mentén $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{z^2+R^2}$:

$$\mathbf{A}(z) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\varphi} = 0 \tag{28}$$

mivel $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$. Azonban ez az eredmény nem lehet helyes. A korrekt eredményhez ki kell számolnunk explicit integrálással a mágneses teret, ahol ismét $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$, illetve $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = z\,\hat{\mathbf{z}} - R\,\hat{\mathbf{r}}$, ahonnan a Biot-savart törvény a következőt adja a z tengely mentén:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\hat{\varphi}\times(z\,\hat{\mathbf{z}} - R\,\hat{\mathbf{r}})}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\mu_0 IRz}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \tag{29}$$

Láthatóan kaptunk az integrál kifejezésen belül egy látszólag $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ irányú tagot is, ami azonban $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = 0$ módon nullára integrálódik, illetve kaptunk még egy extra járulékot, amit a vektorpotenciálból csak akkor kaphattunk volna meg, ha figyelembe vesszük azt tetszőleges r függés esetén is.

VI. VÉGTELEN SÍKLAP EGYENLETES FELÜLETI ÁRAMSŰRŰSÉGGEL

Adott egy végtelen kiterjedésű, vezető síklap az xy-síkban. A vezető lapon x irányban állandó nagyságú K felületi áramsűrűség folyik. Határozza meg a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mágneses indukciót mindenhol a térben!

Megoldás:

Legfontosabb megfigyelés a rendszer x, y-bel kétdimenziós eltolási invarianciája alapján, hogy a tér nem függhet x, y-tól! Illetve, mivel az áram végtelen nagy kiterjedésű a mágneses tér a z változótól sem függhet, mivel mindegy milyen messze vagyunk a síktól, mindig ugyanazok lesznek az áramok járulékai adott pontban. Továbbá azon felül, hogy a Biot-Savart törvény alapján a mágneses térnek nem lehet x irányú komponense, az is világos, hogy z irányú sem lehet, mivel bármely pontban a ponttól jobbra és balra lévő térrész áramai éppen ellentétes z irányú komponenseket adnak! Ezen felül az alsó és felső féltérben is ugyankkora lesz a tér nagysága, de ellentétes irányban fognak mutatni. Tehát $\mathbf{B} = B\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{y}}$, illetve a z függetlenség miatt elég egy tetszőleges l hosszú h magas téglalap alakú görbén alkalamzni az Ampere-törvényt az $z > 0$ térrészben

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B} = 2lB = \mu_0 lK \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{y}} \tag{30}$$

Míg a $z < 0$ térrészben az ellentétes körüljárás miatt a fenti eredmény (-1)-szeresét kapjuk, amivel kifejezhető a teljes megoldás:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{y}} \tag{31}$$

Explicit integrálással is eljuthatunk ehhez az eredményhez, vegyünk $y > 0$ esetén egy $\mathrm{d}y$ vastagású szakaszt, amin az átfolyó áram ekkor $\mathrm{d}I = K\mathrm{d}y$. Ekkor az általa keltett mágneses tér nagysága az $y = 0, z$ magasságban az vonalvezetőre levezetett formula alapján, ami a rendszer 2 dimenziós transzlációs invariánciája miatt egy tetszőleges pont a térben:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{K\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \tag{32}$$

Ekkor azonban figyelembe véve a hasonló nagyságú $y < 0$ infinitezimális szakaszdarabból eredő járulékot a térnek csak y irányú komponense marad, amihez vennünk kell az $y, z = 0$ és a $y = 0, z$ pontot összekötő szakasz és az y tengely által bezárt szög szinuszát, $\sin\varphi = \frac{|z|}{\sqrt{y^2+z^2}}$, ahonnan az infinitezimális y irányú komponens:

$$\mathrm{d}B_y = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{K|z|}{y^2 + z^2}\mathrm{d}y \tag{33}$$

ahol egy 2-es faktorral vettük figyelembe, hogy ugyanolyan járulék adódik mind az $y > 0$, mind az $y < 0$ tartományokból. Innen a következő integrállal kapjuk meg a mágneses tér y komponensét:

$$B_y(z) = \frac{\mu_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y\frac{K|z|}{y^2 + z^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn}(z)}{z}z\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{z}\Big)\Big|_0^\infty = \mu_0 K\mathrm{sgn}(z)\,. \tag{34}$$