Példák: Elektromos terek anyag jelenlétében

Érdemes a szigetelőkre érvényes határfeltételt átfogalmazni egy polarizációs felületi töltéssűrűségre. Ezt kétféleképpen lehet:

1. Egy V térfogatban elhelyezkedő $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség potenciálja

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\mathbf{x}'\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \tag{1}$$

amit az előadáson is tanultak szerint a

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \nabla_{\mathbf{x}'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2}$$

és

$$\nabla_{\mathbf{x}'}\cdot\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) = \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot\nabla_{\mathbf{x}'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

felhasználásával a

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\mathbf{x}'\frac{\nabla_{\mathbf{x}'}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{\partial V} d^2\mathbf{x}'\cdot\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

alakba lehet átírni. Az itt megjelenő

$$\rho_P(\mathbf{x}) = -\mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad \sigma_P(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

kifejezések értelmezhetők a polarizációs (más néven “kötött”) térfogati, illetve felületi töltésként, amelyekkel a V térfogatban elhelyezkedő $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség helyettesíthető.

2. Egy másik módon a térfogatot akkorának választjuk, hogy a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség teljességgel a belsejében legyen. Ekkor a felületi integrál tag zérus, viszont (szabad felületi töltések hiányában) a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ elfoglalta tartomány határán teljesíteni kell a

$$\mathbf{n}\cdot[\epsilon_0\mathbf{E} - (\epsilon_0\mathbf{E}_b + \mathbf{P})] = 0 \tag{4}$$

határfeltételt, ahol $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség a szigetelőn kívül, $\mathbf{E}_b$ pedig belül. Ebből

$$\epsilon_0\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E} - \mathbf{E}_b) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P} \tag{5}$$

ami pont egy

$$\sigma_P(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

polarizációs felületi töltéssűrűségnek felel meg.

I. POLARIZÁLT GÖMB TERE

1. Számolja ki egy homogén polarizációjú, R sugarú gömb elektromos terét!
Megoldás:
Az átlalánosság megcsorbítása nélkül vehetjük úgy, hogy a gömb polarizációja párhuzamos a z tengellyel, ekkor

a levezetett formulák alapján a térfogati és felületi poalrizációs töltéssűrűségek a következő módon adhatóak meg:

$$\mathbf{P}||\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{P} = P\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \rho_{\text{pol}} = -\text{div}\,\mathbf{P} = 0 \tag{7}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}|_{r=R} \equiv \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{P}|_{r=R} = P\cos\theta \tag{8}$$

Most a térerősséget a következőképpen tudjuk megadni, először is a gömbön kívül, "definíció szerint" egy $\mathbf{p}$ dipólusnak kell megadnunk az elektromos terét:

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3} \tag{9}$$

Továbbá ekkor a határfeltétel segítségével kiszámolható a belül lévő elektromos tér, amely intuitívan is látható, hogy a most *szögfüggő* felületi sűrűség miatt nem lesz nulla!

$$\varepsilon_0\hat{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{E}_k - \mathbf{E}_b) = \frac{1}{2\pi}\frac{p\cos\theta}{R^3} - \varepsilon_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E}_b = \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{P} = P\cos\theta \Rightarrow \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E}_b = \frac{1}{2\pi}\frac{p\cos\theta}{R^3} - P\cos\theta \tag{10}$$

Mivel $\frac{4}{3}\pi R^3 P = p$, az elektromos térre $\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E}_b = -\frac{P}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}_b = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ adódik.

2. Egy R sugarú gömb polarizációja

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = k\mathbf{r}, \tag{11}$$

ahol k egy konstans, $\mathbf{r}$ a középpontból eredő vektor. Számolja ki a σ_P, ρ_P "kötött" töltéseket, valamint az elektromos teret a gömbön belül és kívül!
Megoldás:
Ismét a térfogati és a felületi töltéssűrűségek kiszámításával kezdünk:

$$\mathbf{P} = kr\hat{\mathbf{r}} \to P_r = kr \Rightarrow \rho_{\text{pol}} = -\text{div}\,\mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2 kr\big) = -3k \tag{12}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}|_{r=R} \equiv \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{P}|_{r=R} = kR \tag{13}$$

Most a szokott módon egy homogén töltéssűrűség segítségével kell kiszámítanunk a belső térerősséget, ami a Gauss-tétel alkalamzásával adható meg legegyszerűbben:

$$\oint_{\partial V_r} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}_b = 4\pi r^2 E_b = Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{pol}} \Rightarrow E_b = -\frac{k}{\varepsilon_0}\mathbf{r} \tag{14}$$

Mivel minden gömbszimmetrikus, alkalmazva gömbön kívül a Gauss-tételt, egyszerűen visszakapjuk a gömb teljes töltésével vett ponttöltés terét, azonban az össztöltés esetünkben:

$$Q_R = \frac{4}{3}\pi R^3\rho + 4\pi R^2 = 4\pi k R^3 - 4\pi k R^3 = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_k = \mathbf{0} \tag{15}$$

II. TÖLTÉS DIELEKTRIKUM FÖLÖTT

Adott egy töltés a z-tengelyen, a $z = a$ pontban. A térnek a $z < 0$ részét χ_e szuszceptibilitású dielektrikum tölti ki. Mekkora erő hat a ponttöltésre?
Megoldás:
Az $z = a$ magasságban lévő töltés terét vizsgáljuk a $z = 0$ síkon, r távolságra a középponttól, ahol a felületi töltéssűrűség $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{z}} \equiv P \equiv \varepsilon_0\chi_e E$. Ahol minden tag a z komponensnenk felel meg, mivel x, y komponensek nem fordulhatnak elő a rendszer szimmetriája miatt! Ekkor a q töltés terének z irányú komponense $z > 0$ esetén egyszerűen (a tér fentről lefele mutat):

$$E_+^z(z=0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{\sqrt{r^2+a^2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} \tag{16}$$

Ennek ismeretében, illetve tudva, hogy $z < 0$ esetén közel a határhoz a tér egyszerűen kifejezhető a felületi töltéssűrűség segítségével, (Gauss-tétel alkalmazva a végtelen síklapra, a lenti térrésznél ekkor bele kell vennünk a $\varepsilon = \chi_e\varepsilon_0$ faktort is!), $E_- = \frac{\sigma_{\text{pol}}}{2\varepsilon}$. Most alkalmazva felületi töltéssűrűségre a határfeltételt:

$$\sigma_{\text{pol}} = \varepsilon_0\chi_e\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{2\varepsilon_0}\right) \Rightarrow \sigma_{\text{pol}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\frac{qa}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} \tag{17}$$

ahol elsőre furcsának tűnhet, hogy a Gauss-tételt a végtelen egyenletesen töltött síklap esetében alkalmaztuk, azonban, ha a $z = 0-$-ban vizsgálódunk, mindig vehetjük úgy lokálisan, hogy a sík egy végtelen egyeneltesen töltött síklap, mivel annyira közel vagyunk hozzá, hogy nem érződik annak r függése! Láthatóan egy olyan felületi töltéssűrűséget kaptunk, mely két a síktól azonos távolságra lévő ponttöltésből ered, nevezzük el a $z = -a$ pontban lévő töltést q_p, ami a $z > 0$ térben kelti a teret és q'-nak, ami a $z < 0$ térben, ezt nevezzük a tükrötötlések általánosított módszerének! Ekkor a potenciálok, együtt a folytonossági és a felületi töltéssűrűsűghez tartozó határfeltétellel

$$\Phi_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} + \frac{q_p}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}}\right) \tag{18}$$

$$\Phi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \tag{19}$$

$$\Phi_-(0) = \Phi_+(0) \Leftrightarrow q' = q + q_p \tag{20}$$

$$\Downarrow \tag{21}$$

$$E_+^z(0) - E_-^z(0) = -\frac{\sigma_{\rm pol}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d(q_p+q'-q)}{\sqrt{r^2+d^2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\frac{q_p a}{\sqrt{r^2+a^2}} \Rightarrow q_p = -\frac{\chi_e}{\chi_e+2}q \tag{22}$$

ahol a térerősségeknél figyelembe vettük, hogy az alsó q' töltés tere felfel mutat a a $z = 0$-ban! Vagyis a két ponttöltés kép alapján a fenti töltésre ható erő a következő:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\frac{q^2}{4d^2} \tag{23}$$

III. SÍKKONDENZÁTORBA RÉSZBEN BEHELYEZETT DIELEKTRIKUM

Adott egy síkkondenzátor, amely két $L \times L$ méretű síklapból áll, amelyek között a távolság d. Továbbá adott egy ϵ permittivitású dielektrikum, amelynek a dimenziói ugyancsak $L \times L \times d$. A dielektrikumot a kondenzátor egyik oldala felől a kondenzátorba helyezzük. Mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy a dielektrikum és a síkkondenzátor mindkét lapja $L \times x$ felületen érintkezzen, ha

1. a kondenzátoron a töltés Q állandó?
2. a kondenzátoron lévő U potenciálkülönbség állandó?

Számolja ki a két esetben a dielektrikumra ható erőt? Mivel magyarázható a különbség a két eset között? (Érdemes az állandó potenciálú behelyezést két lépésben végrehajtani, először bevinni a dielektrikumot állandó töltés mellett, majd egy feszültségforrás segítségével visszakompenzálni a potenciálkülönbséget az eredeti értékre!)

Megoldás:

Az első esetben a töltés $Q = \text{cst.}$ állandó, azaz az energia $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ módon függ a kapacitástól, ekkor a munka az x részig betolt dielektrikum esetén kapott energia és a dielektrikum nélküli energia különbsége:

$$W(x) = E_x - E_0 \tag{24}$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d},\ C_x = \frac{\varepsilon_0}{d}(L(L-x) + \chi_e Lx) = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(L^2 + (\chi_e - 1)Lx\right) \tag{25}$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{1}{2}Q^2\frac{d}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L^2+(\chi_e-1)Lx} - \frac{1}{L^2}\right) \tag{26}$$

Ekkor az erő egyszerűen csak az x irányban vett gradiens, azaz az x szerinti parciális derivált:

$$F = \frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{\varepsilon_0}\frac{(\chi_e-1)L}{\left(L^2+(\chi_e-1)Lx\right)^2}. \tag{27}$$

Ami vártaknank megfelelőegy taszító erő! Most az állandó feszültségű esetet vizsgálva először állandó töltés mellett visszük be a dielektrikumot, ami az előző feladatban kiszámolt E_x energiára változtatja a kondenzátor energiáját. Ekkor a feszültséget elkezdjük változtatni, állandó kapacitás mellett, vissza az eredeti értékére. Az eredeti értéke $U_0 = \frac{Q}{C_0}$, míg az új értéke $U_x = \frac{Q}{C_x}$. Állandó kapacitás mellett az energia $E = \frac{1}{2}U^2C$, ekkor az energia különbség a potenciál megváltozása által, amiből rögtön a munka és abból az erő is származtatható, ahol csak a feszültség változásakor kapott munkát adjuk meg:

$$U_x = \frac{Q}{C_x} = \frac{Qd}{\varepsilon_0}\frac{1}{L^2 + (\chi_e - 1)\,Lx} \tag{28}$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2}C_x\left(U_x^2 - U_0^2\right) = \frac{1}{2}Q^2C_x\left(\frac{1}{C_x} - \frac{C_x}{C_0^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L^2 + (\chi_e - 1)\,Lx} - \frac{L^2 + (\chi_e - 1)\,Lx}{L^4}\right) \tag{29}$$

$$F_2 = F + \frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = F - \frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_0}\left(\frac{(\chi_e - 1)\,L}{\left(L^2 + (\chi_e - 1)\,Lx\right)^2} + \frac{\chi_e - 1}{L^3}\right) = -\frac{Q^2d}{\varepsilon_0}\left(\frac{(\chi_e - 1)\,L}{\left(L^2 + (\chi_e - 1)\,Lx\right)^2} + \frac{\chi_e - 1}{2L^3}\right) \tag{30}$$

IV. ANALÓGIA AZ ELEKTROSZTATIKA ÉS AZ EGYENÁRAMOK LEÍRÁSA KÖZÖTT

A szigetelők (szabad töltések nélküli) elektrosztatikájának alapegyenletei

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0 \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{31}$$

és az egyenáramok leírása

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0 \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{32}$$

között analógia áll fenn. Ennek segítségével az elektrosztatika megoldási módszereit lehet egyenáramú elrendezések számolására használni.
Megoldás:
Igen.

V. FÖLDELÉSI ELLENÁLLÁS

A földbe d mélységben elástunk egy a sugarú fémgömböt, amelyhez egy vezető huzalt erősítettünk. A huzal másik végét egy elektromos gép földelési csatlakozójához kötöttük. Keressük a gömbnek az R_f ún. "földelési ellenállását" az alábbi módon.

Tudjuk, hogy a föld elektromos vezetőképessége σ és a felette lévő levegőé zérus. Folyjék a huzalon I áram. Ekkor a gömbből kilépő áram csak a földben folyhat. Az analógia miatt egy olyan elektrosztatikai elrendezést kell találni, amely esetén a földben fellépő térerősség erővonalai nem lépnek át a levegőbe. Ez elérhető egy olyan $(+Q)$ tükörtöltéssel, amely megegyezik a földben lévő gömb $(+Q)$ töltésével és egy ugyancsak a sugarú fémgömbön helyezkedik el.

1. Mi a Q töltésnek megfelelő mennyiség az egyenáramú elrendezésben?
2. Határozzuk meg (közelítőleg) a kapott elrendezésben a Φ elektromos potenciálfüggvényt és ennek alapján az R_f földelési ellenállást!
3. Határozzuk meg a föld felületén a potenciálfüggvényt!
4. Határozza meg a maximális "lépésfeszültséget"!

Megoldás:
Mivel az erővonalakkal azonosított áramok nem lépnek ki a földből, nem lépik át a $z = 0$ síkot, használhatunk egy tükörtöltés helyettesítő képet! Ekkor az bevezetett analógiák alapján

$$\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{j} \Rightarrow \int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{D} = \int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{j} \Rightarrow Q \leftrightarrow I \tag{33}$$

Ekkor egyszerűen csak kettő *azonos nagyságú és előjelű* ponttöltés terét kell kiszámítanunk a földbe ásott gömb felületén, amiknek az erővonalképe éppen annak felel, meg hogy nem lépik át a $z = 0$ felüeltet!

$$\Phi(r,z) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}}\right) \tag{34}$$

ahonnan egyszerűen a gömb felszínen a potenciál:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2d-a}\right) \tag{35}$$

Ekkor adjuk meg a kapacitást is az elektrosztatikus helyettesítő képben, mivel a potenciál mindkét képben ugyanaz:

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2d-a}} \tag{36}$$

Mivel a potenciál mindkét esetben ugyanaz a mennyiség az ellenállás megadásához csak végre kell hajtanunk a következő cseréket a kapacitásban: $Q \leftrightarrow I$, $\varepsilon \leftrightarrow \sigma \Rightarrow \frac{Q}{\Phi} \leftrightarrow \frac{I}{\Phi}$ és vennünk a kapott kfiejezésnek a reciprokát:

$$R_f = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{2d-a}}{\pi\sigma}. \tag{37}$$

VI. KIS ÜREGEK EGY NAGY KITERJEDÉSŰ DIELEKTRIKUMBAN

Adott egy nagy kiterjedésű dielektrikum, melyben az elektromos tér $\mathbf{E_0}$, és az elektromos eltolás-vektor $\mathbf{D_0} = \epsilon_0\mathbf{E_0} + \mathbf{P}$.

1. Egy kis gömb alakú üreget vájunk ebben a szigetelőben. Számolja ki az elektromos teret, valamint az elektromos eltolás-vektort a $\mathbf{D_0}$ és $\mathbf{P}$ függvényében a lyuk középpontjában!
2. Számolja ki ugyanezeket a mennyiségeket abban az esetben, ha egy vékony tű alakú üreget vájunk a szigetelőben!
3. Számolja ki ugyanezeket a mennyiségeket abban az esetben, ha egy lapos korong alakú üreget vájunk a szigetelőben!

[A vájt üregek elég kis méretűek ahhoz, hogy $\mathbf{P}, \mathbf{E_0}, \mathbf{D_0}$ homogénnek tekinthetők. Segítség: az üregek kivájásának ugyanaz a hatása, mintha egy ellentétes irányban polarizált, az üreg alakjával megegyező tárgyat helyeznénk az üreg helyébe.]
Megoldás:

1. Használva a segítséget, vagyis a polarizálatlan üreg előáll a teljesen polarizált és egy ellentétesen polarizált kicsi gömb szuperpozíciójaként a következőt jelenthetjük ki, felhasználva, hogy a negatív polarizáltság:

$$\mathbf{E}_{\text{pol}} = \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \tag{38}$$

   Innen vissza tudunk térni az eredeti modellhez:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0\left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) = \mathbf{D}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{P}, \tag{39}$$

   ahol az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\mathbf{D_0} = \epsilon_0\mathbf{E_0} + \mathbf{P}$

2. Tű alakú üreg esetén , aminek az átmérője sokkal kisebb mint a hossza, $L \gg a$, élhetünk azzal a közelítéssel, hogy benne a polarizáció számottevően csak z irányú, azaz csak a lezáró körlapokon jelennek meg felületi töltések

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = -\pi a^2 P \tag{40}$$

   Ekkor az extra térerősség járulék a negatív polarizáltásg miatt a tű közepén egy ponttöltés terével közelíthető, azaz

$$E \approx E_0 + \frac{2a^2\pi P}{4\pi\varepsilon_0(L/2)^2} = \frac{a^2 P}{2\varepsilon_0}\frac{4}{L^2} \approx E_0 \Rightarrow \mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 \tag{41}$$

   ahonnan ismét az alap összefüggés alapján az eltolás vektor $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} \approx \varepsilon_0\mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0 - \mathbf{P}$.

3. Lapos korong alakú üreg esetén, ha a korong sugara sokkal nagybb mint a korong magassága, $R \gg d$, a szélen fellépő korrekciókat elhanyagolhatjuk és a határfeltétel ekkor egyszerűen a $\sigma = P$ összefüggést adja, majd a végtelen síklp analógiája alapján

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{42}$$

ahol a kettes fakotr amiatt hiányzik mivel a korong magsságát azáltal figyelembe kellett vennünk, hogy míg a tetején $+\sigma$, az alján $-\sigma$ felületi töltéssűrűség található. Inne pedig a lapos korong üreg eltolási vektora:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D}_0 - \mathbf{P} + \mathbf{P} = \mathbf{D}_0 \tag{43}$$