

Példák: Multipólsorfejtés és kapacitás

I. GÖMB TÉRFOGATI TÖLTÉSELOSZLÁSSAL

Adott egy R sugarú gömb, amelynek középpontja az origó. A gömb térfogatán

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta \quad (1)$$

töltéseloszlás van, ahol k egy állandó, r és θ a szokásos gömbkoordináták. Vezesse le ennek a töltéseloszlásnak a potenciálját a z -tengelyen az origótól nagy távolságra!

(Segítség: Vegyük észre, hogy a töltéselrendezés hengerszimmetrikus, ami a dipól- és kvadrupólmomentumok számolását leegyszerűsíti.)

Megoldás:

Multipólus sorfejtés:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}^T \underline{Q} \mathbf{r}}{r^5} \right) \quad (2)$$

$$Q = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \quad (3)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (4)$$

$$Q_{ij} = \int d^3\mathbf{r}' \left(3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{r}') \quad (5)$$

Azimuthális/hengerszimmetria esetén, Q_{ij} diagonális és $\text{Tr}(\underline{Q}) = 0 \rightarrow$

$$\underline{Q} = D \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \int d^3\mathbf{r}' \frac{3(z')^2 - (r')^2}{2} \rho(\mathbf{r}') \quad (6)$$

a mostani töltéssűrűség éppen hengerszimmetriával rendelkező rendszernek felel meg, ahol a mono-, di- és kvadrupólus járulékok a következők lesznek:

$$Q = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^R dr r^2 k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta = 2\pi \int_0^\pi d\theta \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \int_0^R dr kR(R - 2r) = 0 \leftrightarrow \int_0^R dr (R - 2r) = 0 \quad (7)$$

$$p_i = 2\pi kR \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^R dr (R - 2r) x_i = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} \rightarrow D &= 2\pi kR \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \int_0^R dr (R - 2r) (3z^2 - r^2) = 2\pi kR \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) \int_0^R dr r^2 (R - 2r) \\ &= -\frac{\pi kR^5}{3} \int_0^\pi d\theta \left(\frac{3}{8} (1 - \cos(4\theta)) + \frac{\cos(2\theta) - 1}{2} \right) = \frac{\pi^2 kR^5}{24} \end{aligned} \quad (9)$$

ahol a dipólus azért tűnt el, mert kiírva gömbi koordinátákban az i . koordinátákat, az x, y komponensben egy-egy $\sim \cos \varphi$, $\sim \sin \varphi$, míg a z komponensben a $\sim \sin^2 \theta \cos \theta$ tag integrálja fog nullát adni. Összességében tehát a következő potenciál adódik:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi^2 kR^5}{48} \right) \frac{z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}}{r^5} = \frac{\pi kR^5 \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)}{192r^3 \epsilon_0} \quad (10)$$

II. NÉGY RÉSZECSCKE POTENCIÁLJA

Négy részecskét a következőképpen helyezzünk el: q töltést a $(0, -a)$ pontra, $3q$ töltést a $(0, a)$ pontra, $-2q$ töltést a $(a, 0)$ pontra, és $-2q$ töltést a $(-a, 0)$ pontra. Vezessen le egy egyszerű közelítő potenciált, ami az origótól nagy távolságra érvényes!

Megoldás:

A négy részecske együttes sűrűsége:

$$\rho(\mathbf{r}') = q(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}) - 2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) \quad (11)$$

Most az össztöltés csak a négy ponttöltés összege, $Q = 0$, míg a dipólusnál nem lesz y irányú komponens mivel a Dirac delták hasáiban csak x és z irányú eltolás van, ami azonnal lenullázza a p_y integráljában megjelenő y tagot. A másik két komponensben pedig csak a megfelelő komponensekhez tartozó Dirac-delták adnak járulékot:

$$p_x = \int d^3\mathbf{r} xq(-2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) = 0 \quad (12)$$

$$p_z = \int d^3\mathbf{r} zq(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}})) = 3aq - aq = 2aq \quad (13)$$

A kvadrupólus tenzor esetén a töltések helyzete miatt csak a Q_{xx} és Q_{zz} komponensek lesznek nem nullák, és ezek:

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \int d^3\mathbf{r} q(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}) - 2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) [3z^2 - r^2] \\ &= \int d^3\mathbf{r} q(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}) - 2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) [2z^2 - x^2 - y^2] = q(8a^2 + 4a^2) = 12qa^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q_{xx} = -12qa^2 \quad (15)$$

Vagyis a teljes potenciál a következő:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2aqz}{r^3} + \frac{6qa^2}{r^5} (z^2 - x^2) \right) \quad (16)$$

III. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL

Legyen $\rho_1(\mathbf{r})$ egy töltéeloszlás, amely $\Phi_1(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. Továbbá legyen $\rho_2(\mathbf{r})$ egy másik töltéeloszlás, amely $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. A két töltéeloszlás vagy nem egyidőben létezik, vagy térben egymástól nagyon messze vannak, azaz, a $\rho_1(\mathbf{r})$ töltéeloszlásnak nincs hatása a $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciálra sem vice versa.

Bizonyítsa be a Green-féle reciprocitási tételt, azaz

$$\int \rho_1(\mathbf{r})\Phi_2(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \rho_2(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (17)$$

Megoldás:

$\rho_1(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi_1(\mathbf{r})$ és $\rho_2(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi_2(\mathbf{r})$ függetlenek egymástól. Írjuk fel először a két elektromos tér szorzatának integrálját:

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = \int d^3\mathbf{r} -\nabla\Phi_1 \mathbf{E}_2 = -\oint d^2\mathbf{f} \Phi_1 \mathbf{E}_2 + \int d^3\mathbf{r} \Phi_1 \nabla \mathbf{E}_2 = -\oint d^2\mathbf{f} \Phi_1 \mathbf{E}_2 + \int d^3\mathbf{r} \Phi_1 \rho_2 / \epsilon_0 \quad (18)$$

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_1 (-\nabla\Phi_2) = -\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}_1 \Phi_2 + \int d^3\mathbf{r} \Phi_2 \nabla \mathbf{E}_1 = -\oint d^2\mathbf{f} \Phi_2 \mathbf{E}_1 + \int d^3\mathbf{r} \Phi_2 \rho_1 / \epsilon_0 \quad (19)$$

Most vegyünk egy $R \rightarrow \infty$ gömböt az integrálási tartománynak, aminek a határán el kell tűnnie a felületi integrálnak, hiszen ha a szuperpozíció elvét alkalmazva ponttöltésekből építjük fel a két rendszert, $\Phi \sim \frac{1}{r}$, $E \sim \frac{1}{r^2}$, ami összességében $\oint d^2\mathbf{f} \Phi_1 \mathbf{E}_2 \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0$ és ugyanígy igaz a másik esetre is, vagyis összességében az adódott a két egyenlet első és utolsó tagjainak egyenlősége alapján, hogy

$$\int d^3\mathbf{r} \Phi_1 \rho_2 = \int d^3\mathbf{r} \Phi_2 \rho_1 \quad (20)$$

IV. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL ALKALMAZÁSAI

1. Tegyük fel, hogy van két elkülönített vezető, a és b . Ha az a vezetőre Q töltést helyezünk, úgy, hogy a b semleges marad, akkor a b -nek potenciálja lesz, jelöljük V_{ab} -vel. Ha viszont b -re teszünk Q töltést, akkor az a -nak lesz potenciálja, ezt jelöljük V_{ba} -val. A Green reciprocitási tétel alkalmazásával mutassa meg, hogy $V_{ab} = V_{ba}$! (Ez az eredmény a vezetők alakjától független.)

Megoldás:

A két vezető tetszőleges geometriájú és ekkor a két töltéssűrűség és az általuk keltett tér függetlenek egymástól, mivel úgy vizsgáljuk őket, hogy amíg az egyikben van töltés addig a másikon nincs. Legyenek a töltéssűrűségek, σ_a és σ_b , ekkor a Green-reciprocitási törvény miatt

$$\int d^3\mathbf{r} \sigma_a V_{ab} = \int d^3\mathbf{r} \sigma_b V_{ba} \rightarrow V_{ab} \int d^2f \sigma_a = V_{ba} \int d^2f \sigma_b \rightarrow V_{ab}Q = V_{ba}Q \quad (21)$$

2. Adott két földelt, koncentrikus fémgömb, sugaruk $a < b$. q töltést helyezünk a központtól r távolságra, úgy, hogy $a < r < b$. Mekkora a teljes indukált töltés a két gömbön?

Megoldás:

q töltés $a < r < b$ távolságra az origótól, az indukált töltéshez alkalmazzuk ismét a Green-féle reciprocitási törvényt, ahol legyen V_a a potenciál az a sugarú gömbön, míg V_b a potenciál a b sugarú gömbön:

$$\int d^3\mathbf{r} \sigma_a V_b = \int d^3\mathbf{r} \sigma_b V_a \quad (22)$$

Azzal megszorítással, hogy $Q_a + Q_b = -q$ a földelés miatt, illetve az ekvipotencialitás következtében $\int d^3\mathbf{r} V\sigma = 0 = V_a Q_a + V_b Q_b + V_r q$, ahol ha $V_r = V_a \frac{a}{r}$, $V_b = V_a \frac{a}{b}$. Átrendezve az egyenletet:

$$Q_b = q \frac{(1 - \frac{a}{r})}{\frac{a}{b} - 1} \quad (23)$$

$$Q_a = -q \frac{1 + (1 - \frac{a}{r})}{\frac{a}{b} - 1} \quad (24)$$

V. POTENCIÁL- ÉS KAPACITÁSEGÜTTHATÓK

A térben N darab fémtest helyezkedik el. Ezekre rendre Q_i töltés van és ennek megfelelően a potenciáljuk Φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). A Maxwell egyenletek linearitása miatt írható, hogy

$$\Phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j \quad (25)$$

$$Q_i = \sum_j c_{ij} \Phi_j,$$

ahol p_{ij} , c_{ij} a potenciál- és a kapacitásegütthatók.

1. A rendszer összenergiájának felírásával mutassa meg, hogy a p_{ij} és a c_{ij} mátrixok szimmetrikusak!

Megoldás:

Az összenergia a potenciálok és a töltések segítségével:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i Q_j p_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i Q_j \frac{p_{ij} + p_{ji}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_i \Phi_j c_{ij} \quad (26)$$

és hasonlóan elvégezhető a szimmetrizálás a c_{ij} együtthatókra is.

2. Legyen $N = 3$. A c_{ij} adatok ismertek. Algebrai "bővítéssel" írja az egyenleteket

$$Q_i = \sum_{k=0}^N C_{ik} (\Phi_i - \Phi_k), i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

alakba, ahol Φ_0 a Föld (végtelen távoli pont) potenciálja! A C_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) neve "főkapacitás", a C_{i0} ($i = 1, 2, 3$) "földkapacitás" vagy "szórt kapacitás". Együttes nevük "részkapacitás". Rajzoljon ún. áramkört modellt!

Megoldás:

Használjuk ki, hogy a földkapacitással együtt a kapacitások összege zérus:

$$Q_i = - \sum_{k=0}^N C_{ik} \Phi_k \rightarrow +\Phi_i \sum_{k=0}^N C_{ik} \rightarrow Q_i = \sum_{k=0}^N C_{ik} (\Phi_i - \Phi_k) \quad (28)$$

3. Írja fel a rendszer energiáját a C_{ik} részkapacitások segítségével!

Megoldás:

Egyszerűen csak használjuk a munkára vonatkozó összefüggést a töltések és a potenciálok segítségével:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \Phi_i = \sum_{k=0, i=1}^N \frac{1}{2} \Phi_i C_{ik} (\Phi_i - \Phi_k) \quad (29)$$

VI. GÖMBÖK KAPACITÁS-MÁTRIXA

Adott két, R_1 és R_2 sugarú fémgömb. A középpontjaik távolsága legyen $a \gg R_1, R_2$. Mivel az a sokkal nagyobb a gömbök sugaránál, ezért jó közelítéssel a Q_1 töltés elektromos potenciálja az R_2 gömbfelületen mindenhol $Q_1/(4\pi\epsilon_0 a)$ -nak vehető és ugyanez fordítva is igaz.

Megoldás:

Az 1-es gömb jó közelítéssel $\Phi_2 \approx \frac{kQ_1}{a} + \frac{kQ_2}{R_2}$ potenciált kelt, illetve fordítva is igaz, a 2-es gömb $\Phi_1 \approx \frac{kQ_2}{a} + \frac{kQ_1}{R_1}$, ahol a második tagok a saját potenciáljuk a felszínen

1. Írja fel a p_{ij} mátrixot erre az esetre!

Ezzel már könnyen kifejezhető a potenciálmátrix:

$$p_{ij} = k \begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/a \\ 1/a & 1/R_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

2. A p_{ij} mátrix ismeretében határozza meg a c_{ij} kapacitás együtthatók mátrixát!

Megoldás:

Innen könnyen meghatározható a kapacitás mátrix egy egyszerű invertálás segítségével:

$$c_{ij} = [p_{ij}]^{-1} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_1 R_2 - 1/a^2} \begin{bmatrix} 1/R_2 & -1/a \\ -1/a & 1/R_1 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\epsilon_0}{a^2 - R_1 R_2} \begin{bmatrix} R_1 a^2 & -a R_1 R_2 \\ -a R_1 R_2 & R_2 a^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

3. Határozza meg a C_{12} főkapacitást és a C_{10} , C_{20} szórt (föld-) kapacitásokat!

Megoldás:

A földpotenciál legyen a végtelenben $\Phi_0 = 0$, ekkor felírva kapacitás együtthatókkal a potenciálokat:

$$Q_1 = -C_{10}\Phi_0 - C_{12}\Phi_2 + C_{10}\Phi_1 + C_{12}\Phi_1 \quad (32)$$

$$Q_2 = -C_{20}\Phi_0 - C_{21}\Phi_1 + C_{20}\Phi_2 + C_{21}\Phi_2 \quad (33)$$

$$\Rightarrow (C_{10} + C_{12})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 \Rightarrow c_{12} = c_{21} = -C_{12} \quad \Rightarrow (C_{20} + C_{21})\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 \Rightarrow c_{11} = C_{10} + C_{12} \quad (34)$$

$$\Rightarrow c_{22} = C_{20} + C_{21} \quad (35)$$

$$\Rightarrow C_{12} = C_{21} = -c_{12} \quad (36)$$

$$\Rightarrow C_{20} = c_{22} + c_{12} \quad (37)$$

$$\Rightarrow C_{10} = c_{11} + c_{12} \quad (38)$$

VII. ÁTLAG ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG GÖMBÖN BELÜL

Mutassa meg, hogy egy R sugarú gömbön belül, a gömbön belül található töltésekből eredő átlagos elektromos térerősség:

$$\mathbf{E}'_{\text{átlag}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad (39)$$

ahol \mathbf{p} a teljes dipólmomentum. Ezt az eredményt például a következő lépéseket követve lehet bebizonyítani:

1. Mutassa meg, hogy az átlag elektromos tér a gömbön belül, amelyet egy az \mathbf{r} -pontban lévő q töltés hoz létre, az ugyanaz, mint amit egy $\rho = -q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ töltéeloszlás hoz létre az \mathbf{r} pontban.

Megoldás:

Az átlagos tér, ha ponttöltés az \mathbf{r} helyen tartózkodik, a következő kompakt alakban fejezhető ki egy pontban a gömbön belül, a szokásos módon:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -kq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (40)$$

ami ha kiátlagolunk egy origó középpontú gömbre:

$$E_{\text{atlag}}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi R^3} \int d^3\mathbf{r}' - kq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (41)$$

ami definíció szerint a $\rho(\mathbf{r}) = \frac{-q}{4/3\pi R^3}$ töltéssűrűség által keltett potenciál.

2. A fenti ρ töltéeloszlás terét ki lehet számolni a Gauss tétel segítségével is. Ebben az eredményben szerepel a q töltés dipólmomentuma is; írja át a (39) alakba!

Megoldás:

Alkalmazzuk a Gauss-tételt egy $r < R$ sugarú gömbre:

$$E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{-qr^3}{R^3} = -\frac{r\rho}{3\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{kq}{R^3} \mathbf{r} = -\frac{k}{R^3} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r} = -\frac{k}{R^3} \mathbf{p} \quad (42)$$

3. A szuperpozícióelv segítségével általános töltéselrendezésre is megkapjuk a kívánt eredményt.

Megoldás:

Igen.

VIII. A DIPÓLUS SZINGULARITÁSA

Tudjuk, hogy egy "tisztá" dipólus elektromos tere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]. \quad (43)$$

1. Számolja ki egy z irányba mutató, az origóban lévő dipólus átlag elektromos terét egy R sugarú gömbön belül és vesse össze a (39) egyenlettel!

Megoldás:

Ha $\mathbf{p} = p_z \hat{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3} (3p_z \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - p_z \hat{\mathbf{z}})$, innen az átlagos érték:

$$\mathbf{E}_{\text{atlag}} = \frac{3}{4\pi R^3} k \int d^3\mathbf{r} \frac{3p_z \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - p_z \hat{\mathbf{z}}}{r^3} = \frac{3}{16\pi^2 R^3 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^R dr \frac{3p_z \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - p_z \hat{\mathbf{z}}}{r} = \mathbf{0} \quad (44)$$

mivel az x és y komponensekben $\sim \cos \varphi, \sim \sin \varphi$ függések nullát adnak a szögintegrálások után, míg a z komponens integráljában összességében egy $\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = 0$. Viszont a radiális rész ezzel szemben divergens járulékot ad, mivel $\sim \int_0^R dr \frac{1}{r} \rightarrow \infty$.

A különbség abból adódik, hogy a dipólus elektromos tere az origóban divergál. A szögintegrál nulla, viszont a radiális integrál végtelen, így nem egyértelmű az eredmény. A paradoxon megoldása, hogy a (43) egyenlet alapján kapott eredményt csak egy dipólus körüli ϵ sugarú gömbön kívül tekintjük érvényesnek, ez a kontribúció egyértelműen nulla, viszont a teljes eredmény ((39) egyenlet) a gömbön belüli járulékból ered.

2. Milyenek kell lennie a gömbön belüli térnek, hogy kijöjjön az előző példában talált eredmény? (Válasz: egy $-(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$ plusz járulékot kell tartalmazni.)

Megoldás:

Az $\epsilon \rightarrow 0$ -n belüli teret válasszuk meg $\tilde{\mathbf{E}} = -(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$ -nek, ami az átlagolás után a következő adja:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{atlag}} = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < \epsilon} d^3\mathbf{r} (-\mathbf{p}/\epsilon_0) \delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} \quad (45)$$