Példák: Laplace egyenlet, változószeparáció

I. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál az xz-síkon, a másik $y = a$-nál helyezkedik el. Mindkettő $x > 0$ részre terjed ki, $x < 0$ részen vákuum van. A végüket $x = 0$-nál lezárja egy végtelen hosszú szalag, amelynek a vastagsága a, a z irányban végtelen, és az y irányban az $0 < y < a$ tartományon terjed ki. A szalag a két fémlaptól elszigetelt, a potenciálja $V_0(y)$. Számolja ki a potenciált a három felület (két fémlap és szalag) által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)
Megoldás:
Laplace/Poisson (inhomogén Laplace) egyenlet megoldása adott peremfelétel mellett egyértelmű:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Ennek ismerjük a partikuláris megoldását, $\Phi_p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, míg a homogén megoldást az adott határfeltétel specifikálása által tudjuk megadni:

$$\Delta\Phi_h(\mathbf{r}) = 0 + \text{ határfeltétel: } \Phi_h(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in S} \tag{2}$$

Descartes koordináta-rendszerben, 2 dimenzióban, a következő módon tudunk eljárni, alkalmazva a *változószeparáció módszerét*, azaz $\Phi(x, y) = X(x)\,Y(y)$:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(\mathbf{r}) = 0 \\ &\Phi(x,y) = X(x)Y(y) \to (\Delta\Phi(x,y))/\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial_x^2 X(x)}{X(x)} + \frac{\partial_y^2 Y(y)}{Y(y)} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Az utolsó egyenlet baloldalán az első tag csak x-től függ, a második tag csak y-tól, így mindkettő csak egy-egy konstans lehet, pontosabban egymás -1-szeresei. $\partial_x^2 X(x) = \gamma X(x)$, $\partial_y^2 Y(y) = -\gamma Y(y)$. A γ együtthatót pedig a határfeltétel alpaján tudjuk meghatározni. Az egyik feltételünk, hogy az $x \to \infty$ limeszben el kell tűnnie a potenciálnak, $\Phi(x \to \infty) = 0$, ami csak pozitív γ-t eredményezhet, illetve exponenciálisan lecsengő $X(x) \sim e^{-\gamma x}$-et, ekkor írjuk inkább a kényelmesebb $\gamma = \alpha^2$, aminek következtében $\partial_y^2 Y(y) = -\alpha^2 Y(y)$. Most határozzuk meg α értékét a $\Phi(x, y = 0, a) = 0 \to Y(y = 0, a) = 0$ alapján:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\alpha^2 Y \to Y(y) = A\sin(\alpha y) + B\cos(\alpha) + Y(y = 0, a) = 0 \tag{4}$$

$$\to Y(y = 0, a) = 0 \to \alpha = \frac{n\pi}{a} \to \Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{5}$$

ahol, mivel tetszőleges n-re teljesülnie kell, azoknak általánosan vennünk kell egy lineár kombinációját, ahol az együtthatókat a $\Phi(0, y) = V_0(y)$ fogja meghatározni, amihez felhasználjuk az ortogonalitási szabályt, azaz hogy $\int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) = \delta_{nm}a/2$

$$\begin{aligned} &\Phi(0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0(y) \Big/ \int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\ldots \\ &\frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) V_0(y) = A_m \end{aligned} \tag{6}$$

Vagyis megadtuk egy integrálként az A_m együtthatókat.

2. Egy végtelen hosszú téglalap alapú fémcső (a téglalap oldalai a és b) az $x = 0$-nál kezdődik, és az x tengely pozitív irányaban végtelen. Az $x = 0$ végén egy kis téglalap alakú szigetelő a potenciált $V_0(y, z)$ értéken tartja. A téglalap egyik a hosszúságú oldala a z-tengelyen, a másik a z-tengellyel párhuzamosan, $y = b$-nél található, az egyik b hosszúságú oldala pedig az y tengelyen, a másik pedig az y tengellyel párhuzamosan a $z = a$-nál

található. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton! (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)
Megoldás:
Most hasonlóan járunk el, csak 3 dimenzióban:

$$\Delta\Phi(x,y,z)=0 \to \Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \to \Delta\Phi(x,y,z)=\Phi(x,y,z)=0 \to \frac{\partial_x^2 X(x)}{X(x)}+\frac{\partial_y^2 Y(y)}{Y(y)}+\frac{\partial_z^2 Z(z)}{Z(z)}=0 \tag{7}$$

Most 2 független konstanst kell bevezetnünk oly módon, hogy $\partial_x^2 X/X=\alpha^2+\beta^2$, $\partial_y^2 Y/Y=-\alpha^2$, $\partial_z^2 Z/Z=-\beta^2$. Ekkor a következő megoldások adódnak a három egyváltozós függvényre:

$$\begin{aligned}
X(x) &\sim e^{-\sqrt{\beta^2+\alpha^2}x}\\
Y(y) &\sim \sin(\beta y)\\
Z(z) &\sim \sin(\alpha z)
\end{aligned}$$

Most meghatározzuk α és β lehetséges értékeit a határfeltételek alapján:

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,y=0,b,z)=0 \to \alpha_n=\frac{n\pi}{b}\\
&\Phi(x,y,z=0,a)=0 \to \beta_n=\frac{n\pi}{a}\\
&\Phi(x,y,z)=\sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m}e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)
\end{aligned}$$

Most ismét, mivel ismerjük a potenciált a $\Phi(x=0,y,z)=V_0(y,z)$ értékeknél, illetve most egy duplaintegrál formájában alkalmazva az ortogonalitási azonosságot, $\int_0^a\int_0^b \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right)\delta_{nn'}\delta_{mm'}ab/4$:

$$\begin{aligned}
&\Phi(0,y,z)=\sum_{n,m=0}^{\infty}A_{n,m}\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)=V_0(y,z)\Big/\int_0^a\int_0^b \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\dots\\
&A_{n,m}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)V_0(y,z)
\end{aligned} \tag{8}$$

3. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással és az xz-síkkal párhuzamosan, az egyik $y=0$-nál, a másik $y=a$-nál, helyezkedik el. Mindkét fémlap szegélye $x=0$-nál van, és csak az $x>0$ tartományban terjednek ki. A $x=0$-nál található szegélyüket lezárja egy végtelen hosszú szalag, amely a két fémlapoktól elszigetelt, és amelynek a potenciálja V_0, ha $0<y<a/2$, és $-V_0$ ha $a/2<y<a$. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert!)
Megoldás:
Ismét két dimenzióban dolgozunk, hasonló elrendezés esetén, mint az első példában, vagyis rögtön felírhatjuk a megoldást a következő alakban:

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{9}$$

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}y\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)V_0(y) \tag{10}$$

Most azonban ismerjük a határfelételben mgjelenő potenciál potnosa alakját, amit beírva az A_n együtthatókat definiáló integrálba, a következő adódik:

$$A_n=\frac{2V_0}{a}\left(\int_0^{a/2}\mathrm{d}y\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)-\int_{a/2}^{a}\mathrm{d}y\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)=\frac{2V_0}{n\pi}(1-2\cos(n\pi/2)+(-1)^n) \tag{11}$$

Könynen meg lehet mutatni, hogy ez a kifejezés csak akkor nem ad nullát, ha $n=4k+2$ alakú, vagyis

$$A_n=\frac{4V_0}{(2k+1)\pi}\delta_{n,4k+2} \tag{12}$$

4. Egy téglalap-alapú végtelen cső négy oldalából három földelt fémlap. Ezek az $y = 0$, $y = a$, és $x = 0$-nál helyezkednek el. A negyedik, $x = b$-nél elhelyezkedő $V(y)$ potenciálon van. A cső a z irányban, mind a pozitív és negatív irányokban végtelen. Vezesse le a potenciált!
Megoldás:
Ismét a kétdimenziós megoldást kell alkalmaznunk és ismét a két földelési feltétel miatt, $\Phi(x, y = 0, a) = 0 \rightarrow Y(y = 0, a) = 0$, az $\partial_y^2 Y = -\alpha^2 Y$ differenciálegyenlet megoldásaként $\sim \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ alakú függvényt fogunk kapni, illetve most a $\partial_x^2 X = \alpha^2 X$ egyenlet megoldását a $X(x) \sim \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ alakban kell keresnünk, hogy ki tudjuk elégíteni a $\Phi(0, y) = 0$ feltételt. Ekkor a teljes megoldás az általános együtthatókkal, majd azokat az ortogonalitási feltételből meghatározva:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \tag{13}$$

$$\Phi(x = b, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V(y) \tag{14}$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a \mathrm{d}x \, \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) V(y) \tag{15}$$

II. LAPLACE-EGYENLET GÖMBKOORDINÁTÁKBAN

Gömbkoordinátákban a Laplace egyenlet alakja

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \tag{16}$$

Azimutális szimmetria esetén nincs ϕ-függés. Ebben az esetben a megoldás felírható

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{17}$$

alakban.

- Mutassa meg, hogy az

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{18}$$

a radiális rész általános megoldása.

Megoldás:
Ha nincs azimutális szögfüggése az utolsó tag kiesik és ekkor ismét osszunk le mindent a $\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$-val:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0 \tag{19}$$

Vagyis mivel ismét mindkét tag csak különböző változóktól függenek, $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = \alpha R$, látható, hogy mind az r^l, mind az $r^{-(l+1)}$ éppen önmagával lesz arányos a differenciáloperátor hatása után:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (Ar^l)}{\partial r} \right) = l(l+1)Ar^l \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (Br^{-(l+1)})}{\partial r} \right) = l(l+1)Ar^{-(l+1)} \rightarrow \alpha = l(l+1) \tag{21}$$

A θ-függő rész általános megoldásai a Legendre polinómok, $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$. Az első néhány Legendre polinom:

$$P_0(x) = 1 \tag{22}$$

$$P_1(x) = x \tag{23}$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \tag{24}$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2. \tag{25}$$

A Legendre polinomokra igaz, hogy

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}. \tag{26}$$

1. Adott egy R sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál $\Phi_0(\theta)$. Határozza meg a potenciált a gömbön belül!
Megoldás:
A gömbön belüli potenciálhoz a radiális részből csak az Ar^l tagot tekinthetjük, mivel nem lehet a potenciál szinguláris az origóban, $\Phi(r \to 0) < \infty$. Ekkor az általános megoldás:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{27}$$

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{l=0} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \Phi_0(\theta) \tag{28}$$

Most használjuk a Legendre polinomok ortogonalitási relációját, azaz

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta \Phi_0(\theta)\, P_l(\cos\theta) = \frac{2l+1}{2R^l}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x)\, \Phi_0(x) \tag{29}$$

2. Adott egy semleges R sugarú fémgömb, amelyet $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ (homogén) külső elektromos térbe helyezünk. Határozza meg a potenciált a gömbön kívül! (Segítség: csak a $P_0(x)$ és a $P_1(x)$ Legendre polinomokra van szükség.)
Megoldás:
Ekkor a határfeltételt a felületen a külső tér által keltett potenciál értékével vesszük figyelembe, $\Phi(R) = -E_0 R\cos\theta$, illetve mivel nincs földelve a gömb, általánosa egy konstans V_0 potenciálja is lehet. A gömbön kívüli potenciál meghatározásához csak a $\sim Br^{-(l+1)}$-es tagot kell tekintenünk, mivel további határfeltételünk, hogy a potenciál a végtelen távolban sem divergálhat, $\Phi(r \to \infty) < \infty$. Vagyis az általános kifejtés a következőképpen néz ki:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)\,, \;\; \Phi(R,\theta) = -E_0 R\cos\theta \tag{30}$$

Látható, hogy a $P_l(\cos\theta)$ Legendre polinomok függetlensége miatt csak a $P_0(\cos\theta)$ és a $P_1(\cos\theta)$ jöhet szóba, ami a határfeltétel alapján ki kell, hogy elégítse:

$$B_0R^{-1}+B_1R^{-2}P_1(\cos\theta) = -E_0R\cos\theta+V_0 \to B_1 = -E_0R^3,\;\; B_0 = V_0 \to \Phi(r) = \frac{-E_0R^3}{r^2}\cos\theta+V_0 = \frac{-E_0R^3 z}{r^3}+V_0 \tag{31}$$

ami láthatóan egy dipólus potenciálja, ahogyan megkaptuk a 4. Gyakorlat/IV. példája által is.