# Példák: Tükörtöltés módszer, Laplace egyenlet

## I. PONTTÖLTÉS FÖLDELT VEZETŐ KÖZELÉBEN

A $z$-tengelyen két pont töltés helyezkedik el, $q$ nagyságú $z = 3d$ pontban, $-2q$ nagyságú pedig a $z = d$ pontban. Az $xy$-sík alatti ($z < 0$) teret homogén földelt vezető tölti ki. Mekkora erő hat a $q$ töltésre?
**Megoldás:**
A homogén földelt vezetőben a töltéselrendeződés úgy fog módosulni, illetve annyi extra töltést fog felszívni a ”földből”, hogy a fémfelület ekvipotenciális legyen, azaz a felszínen zérus legyen az elektromos tér tangenciális komponense, precízen megfogalmazva:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

mivel $x$ és $y$ felelnek meg a tangenciális iránynak. Ezt a tükörtöltések módszerével tudjuk kvantifikálni, vagyis felhasználjuk az elektrosztatika egyértelműségét, azaz adott határfeltétel mellett a $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Poisson egyenlet megoldása egy konstans eltolás erejéig egyértelmű! Tehát mindegy milyen elrendezéssel realizálódik a rendszer, amíg ugyanazok a határfeltételek vannak érvényben, az eredmény változatlan marad, míg a konstans eltolást mindig úgy határozzuk meg, hogy azzal a potenciál folytonos maradjon! Ennek megfelelően a földelt fém által meghatározott határfeltételt próbáljuk meg kielégíteni úgy, hogy a fémet helyettesítjük két ponttöltéssel, melyek olyan erővonalképet hoznak létre, amik teljesítik a ”merőlegességi feltételt” a $z = 0$ síkon!
Ehhez vegyünk éppén $z = -d$ és $z = -3d$-ben ellentétes nagyságú töltéseket, melyek a következő potenciált keltik tetszőleges $z$ esetén és $r^2 = x^2 + y^2$ jelölést alkalmazva:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-3d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+3d)^2}} - \frac{2}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} + \frac{2}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right) \tag{2}$$

Látható, hogy tetszőleges tangenciális irány kiszámítható a $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ módon, ami csak a fémfelületen lesz nulla, igazolva a helyettesítő kép érvényességét.
Ekkor a $q$ töltésre 3 másik töltés ereje hat:

$$F_q = kq^2\left(\frac{-2}{4d^2} + \frac{2}{16d^2} - \frac{1}{36d^2}\right) = \frac{-58kq^2}{144d^2} \tag{3}$$

## II. TÖLTÉS FÖLDELT FÉMGÖMB KÖZELÉBEN

$q$ nagyságú ponttöltés egy földelt $R$ sugarú fémgömb középpontjától $a$ távolságra van, ahol $a > R$.

1. Számolja ki a potenciált a gömbön kívül!
   **Megoldás:**
   Ismét alkalmazzuk azon elvet, hogy a gömb felületén érvényes határfeltételt kielégíthetjük egy megfelelően elhelyezett tükörtöltéssel is, ehhez vegyünk $a'$ távolságra egy $q'$ nagyságú tükörtöltést a gömbön belül $a' < R$, ekkor a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = k\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(a')^2-2ra'\cos\theta}}\right) \tag{4}$$

   Ekkor az ekvipotencialitás kielégülése pont az jelenti, hogy $\Phi(R,\theta) = \text{áll.} = 0$, vagyis nem függ a $\theta$ szögtől és legkényelmesebb módon 0-nak választottuk meg! Ekkor a feltétel alpján:

$$\sqrt{\frac{R^2+(a')^2-2Ra'\cos\theta}{R^2+a^2-2Ra'\cos\theta}} = \frac{q'}{q} = \text{const} \tag{5}$$

   mivel minden $\theta$-ra igaznak kell lennie, az érték csak egy $\theta$ független konstans lehet! Ekkor válasszunk $\theta = \pi$-t és $\theta = 0$-át, amihez a követlező konstans értékek tartoznak:

$$\frac{R-a'}{a-R} = \frac{R+a'}{R+a} \to -2aa' = -2R^2 \to a' = \frac{R^2}{a}, \tag{6}$$

ahonnan a ponttöltés értéke $\theta = \pi$-nél számolva:

$$q' = -q\frac{R+a'}{R+a} = -\frac{R}{a}q \tag{7}$$

Ezekkel az értékekkel a potenciál a tér egy tetszőleges pontjában:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2+R^4-2raR^2\cos\theta}}\right) \tag{8}$$

2. Számolja ki a gömbön indukált felületi töltéssűrűséget a gömbi $\theta$-szög függvényében. Integrálja ki ezt a kifejezést, azaz, számolja ki a teljes, a gömb felületén, indukált töltést! (Útmutatás: az integrál értékét explicit számolás nélkül is meg lehet mondani Maxwell törvényei alapján!)
**Megoldás:**
Alkalmazzuk az integrális Gauss-tételt egy infinitezimális d$A$ felületű $h \ll R$ magasságú téglatestre a gömb felszínén, ami így szükségszerűen körbe ölel $\sigma$d$A$ nagyságú töltést:

$$\begin{aligned} E\mathrm{d}A &= \frac{\sigma \mathrm{d}A}{\varepsilon_0} \to \sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\bigg|_{r=R} \\ \sigma &= -\frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2+R^4-2raR^2\cos\theta}}\right)\Bigg|_{r=R} \\ &= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{r-a\cos\theta}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a^2/R-a\cos\theta}{(a^2+R-2aR\cos\theta)^{3/2}}\right) = \frac{q}{4\pi}\frac{R-a^2/R}{(a^2+R^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} \end{aligned} \tag{9}$$

3. Mi a különbség, ha a gömb nem földelt, hanem izolált?
**Megoldás:**
Ha a gömb izolált az eredményünket ki kell egészíteni egy az origóba rakott $-q'$ nagyságú töltéssel, hogy az össztöltés és a határfeltétel is érvényben maradjon! Tehát minden korábbi egyenletünkhöz hozzá kell vennünk egy origóbeli $\frac{R}{a}q$ nagyságú ponttölés hatását:

$$\Phi_{\text{izolált}} = \Phi(\mathbf{r}) + \frac{kRq}{ar} \tag{10}$$

$$\sigma_{\text{izolált}} = \sigma + \frac{q}{4\pi Ra} \tag{11}$$

## III. TÖLTÉS EGY DERÉKSZÖGŰ ÜREGBEN

A tér egy részét földelt vezető tölti ki, a következőképen. A $z$-tengellyel párhuzamosan nézve, tetszőleges $z$-nél az $xy$ sík pozitív negyede üres, viszont az összes többi negyedet kitölti a vezető anyag. Az anyagot határoló két síkfelület az $xz$ és az $yz$ tengelyeken találhatók, derékszögben találkoznak egymással. A $z$-tengelyen haladva a rendszer szimmetrikus (transzlációs szimmetria), azaz, az elrendezés változatlan a $z$-tengely mentén.

Az $xy$ síkra, $z = 0$-ban az $(a, b, 0)$ pontban egy $q$ nagyságú ponttöltést helyezünk el.

1. Számolja ki a potenciált az $xy$ sík pozitív negyedében!
**Megoldás:**
Ekkor először is biztosítanunk kell, hogy mind az $y > 0$ tengely mentén, mind az $x > 0$ tengely mentén kielégüljön a feltétel, miszerint ekvpotenciálisnak kell lennie ezen felületeknek, vagyis vennünk kell egy $-q$ tükörtöltést a $(a, -b, 0)$ és a $(-a, b, 0)$ pontokban, ekkor azonban a $-b$-nél lévő töltés elrontja a határfeltételt az $x > 0$ tengely mentén és fordítva a $-a$-ban évő töltés elrontja a határfeltételt az $y > 0$ tengely mentén! a megoldást az jelenit, ha bevezetünk még egy, $q$ nagyságú, tükörttöltést a $(-a, -b, 0)$ pontban, ami által két-két töltés pár ekvipotenciálissá teszi mind az $x$, mind az $y$ tengelyeket! Ekkor a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}}\right) \tag{12}$$

2. Mekkora erő hat a $q$ töltésre?
**Megoldás:**
A két $-q$ töltés által ható erők mergőlegesek egymásra, míg a harmadik az első kettő eredőjével párhuzamosan mutat:

$$\mathbf{F}_x = -\frac{kq^2}{4a^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_y = -\frac{kq^2}{4b^2}\hat{\mathbf{y}} \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_{\text{átlós}} = \frac{kq^2}{4(a^2+b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{y}}\right) \tag{15}$$

Ahonnan az eredő erő:

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{4}() \tag{16}$$

3. Mekkora munka kell ahhoz, hogy a $q$ töltést a végtelenből az $(a, b, 0)$ pontra helyezzük?
**Megoldás:**
Ezt legegyszerűbben úgy adhatjuk meg, ha a töltést először végig az $\hat{\mathbf{x}}$ vektorral párhuzamosan mozgatjuk, majd az $\hat{\mathbf{y}}$-al párhuzamosan hozzuk be a kívánt pontba

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{kq^2}{4}\left(-\int_a^\infty \mathrm{d}x\,\frac{1}{x^2} - \int_b^\infty \mathrm{d}y\,\frac{1}{y^2} + \frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\right) = \frac{kq^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{17}$$

## IV. VEZETŐ GÖMB KONSTANS ELEKTROMOS TÉRBEN

Az $R$ sugarú földelt vezető gömb konstans elektromos térben problémája is megoldható a tükörtöltés módszerrel. Legyen a gömb középpontja az origó. Helyezzünk egy $-q$ töltést a $z$ tengelyre az origótól $a > R$ távolságban, valamint egy $+q$ töltést a $z = -a$ pontra. A gömbön kívüli tér meghatározható, mint a két eredeti töltés, és a két tükörtöltés tere. Ahhoz hogy konstans teret hozzunk létre a gömb körüli tartományban, a két eredeti töltéssel a végtelenbe kell tartani (a $-q$-val a $+\infty$-be, a $+q$-val a $-\infty$-be), úgy hogy közben $q/a^2$ konstans.

Határozza meg a gömbön kívüli potenciált és elektromos teret, ha egy $R$ sugarú vezető földelt gömböt $E$ erősségű konstans elektromos térbe helyezünk! Az eredeti tér a $+z$ irányba mutat.

**Megoldás:**
Tudjuk a 2. Gyakoroal/I/b feladatól, hogy a két végtelenül messzi végtelenül nagy pontöltés tere az origó közelében $\mathbf{E} = -8\frac{kq}{d^2}\hat{\mathbf{z}}$ teret kelt, ahol a $\frac{q}{4\pi d^2} \equiv \eta$ rögzített!. Ekkor vegyük a gömbön blüli tükörtöltéseket, mint helyettesítő elrendezést, amiknek a nagysága és pozíciója $\pm q' = \mp\frac{R}{d}q$, $d'_\pm = \pm\frac{R^2}{d}$, aminek hatására a teret ki tudjuk számolni, mint négy töltés tereinek szuperpozíciója, észben tartva, hogy $q \to \infty$, $d \to \infty$, $\frac{q}{4\pi d^2} = \text{const.}$, az origótól nem túl messze:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 8\frac{\eta}{\varepsilon_0}z + \frac{kqR}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+R^2/d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-R^2/d)^2}}\right) \tag{18}$$

A második tagban ismét végre kell hajtanunk egy sorfejtést, hogy megjelenjen a véges értékű $\eta$ paraméter, $\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\pm R^2/d)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \mp \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}}\frac{zR^2}{d}$, tehát a nulladrendű tagok ki fognak esni és végeredményben a következő adódik:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx 8\frac{\eta}{\varepsilon_0}z + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{19}$$

ahol láthatón egy dipólus terét kaptuk vissza a gömbön belüli tükörtöltésekből, ahol $\mathbf{p} = -\frac{k\eta R^3}{\varepsilon_0}$ Ahonnan a térerősség, felhasználva, hogy $-\nabla\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p}r^2 - 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -8\frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{\mathbf{p}r^2 - 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} \tag{20}$$

Ha a gömb felületén a potenciál $V_0$, miként módosulnak a fenti mennyiségek?
**Megoldás:**
Ezesetben egy olan ponttöltést kell még beraknunk a középpontba, ami biztosítja a $V_0$ potenciált a gömb felszínén, $\tilde{q} = \frac{RV_0}{k}$, ami által a teljes potenciál kiegészül egy extra járulékkal $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{RV_0}{r}$, illetev az térerősség járulék, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{RV_0}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$.

## V. KÉT VÉGTELEN HOSSZÚ VONALTÖLTÉS

Adott egy $-\lambda$ és egy $\lambda$ töltéssűrűségű végtelen pálca, amelyek a $z$-tengellyel párhuzamosak, és az $x = -a$, valamint az $x = a$ pontokat metszik. Bizonyítsa be, hogy ennek a töltéselrendezésnek az ekvipotenciális felületei hengerek! Számolja ki a hengerek sugarait és tengelyeinek koordinátáit!
**Megoldás:**
A Gauss-tétel alapján tudjuk, hogy egy ilyen pálca tere $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda k}{r}\hat{\mathbf{r}}$, henger koordinátákban, $r^2 = x^2 + y^2$, ahonnan a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2\lambda k \ln\left(\frac{r_\pm}{r_0}\right),\ r_\pm = \sqrt{(x \mp a)^2 + y^2} \tag{21}$$

Tehát a teljes potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2\lambda k \ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right) \tag{22}$$

Vagyis olyan $x, y$-okat kell keresnünk, amire a fenti kifejezés állandó, azaz $r_+ = Cr_- \rightarrow x^2 - 2xa + y^2 = C^2x^2 + 2C^2xa + C^2y^2$, ahol $C$ egy tetszőlges konstans. Átrendezve az eyenletet és bevezetve az $b = \frac{C^2-1}{C^2+1}$ változót a következő egyenlet adódik

$$x^2 + y^2 + 2abx + b^2 = \left(b^2 - 1\right) a \rightarrow (x + ba)^2 + y^2 = \left(b^2 - 1\right) a^2 \tag{23}$$

ami nyilvánvalóan egy kör egyenletének felel meg! A hengerek korrdinátái $y = 0$, illetve $x = ba$, ahol a bevezetett $b$ paramétert a $\frac{r_+}{r_-} = C$ paraméterből származtattuk, ami kifejezhető a potenciállal, $2\lambda k \ln C = V \rightarrow C = e^{\frac{V}{2\lambda k}} \rightarrow b = \frac{e^{\frac{V}{\lambda k}-1}}{e^{\frac{V}{\lambda k}+1}}$, illetve a hengereks sugara $\left(b^2 - 1\right) a$.

## VI. LAPLACE EGYENLET MEGOLDÁSÁNAK ÁTLAGOLÁSI TULAJDONSÁGA

A Laplace egyenlet:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0, \tag{24}$$

ahol $\Phi(\mathbf{r})$ a keresett elektrosztatikus potenciál.
A Laplace egyenlet megoldására igaz a következő két állítás:

- A potenciál értéke egy adott $\mathbf{r}$ pontban egyenlő egy, a pont körül vett, gömb potenciáljának átlagával, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\text{gömb}} \Phi df. \tag{25}$$

  A gömbnek teljesen a zárt felületen belül kell lennie, azaz nem tartalmazhat töltéseket. A töltések, amelyek a $\Phi(\mathbf{r})$ potenciált létrehozzák mind a gömbön kívül helyezkednek el.

- Az előbbi állítás következménye, hogy a $\Phi(\mathbf{r})$ függvénynek a zárt felületen belül nem lehetnek lokális minimumai vagy maximumai, ezek mind a határfelületen találhatók.

Feladatok:

1. A fenti két állítás a dimenziók számától függetlenül igaz. Oldja meg a Laplace egyenletet az egy dimenziós esetben, azaz keresse meg a

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = 0, \tag{26}$$

egyenlet megoldását, ha adott egy egydimenziós térfogat 0 és $L$ között! Igazolja a fenti két állítást! Melyek a lehetséges határfeltételek?
**Megoldás:**
Az egyenlet általános megoldása: $\Phi(x) = ax + b$, a két határefeltételt a legáltalánosabban a következőképpen vehetjük figyelembe:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi_0 \rightarrow b = \Phi_0 \\ \Phi(L) &= \Phi_L \rightarrow a = (\Phi_L - \Phi_0)/L \end{aligned}$$

A "felszín" egydimenziós esetben az intervallum két határpontja, azaz vegyünk egy tetszőleges $0 < x_1 < L$ és $0 < x_2 < L$-t és vegyük az átlag eredményt, $\Phi((x_1 + x_2)/2) = (\Phi(x_1) + \Phi(x_2))/2$, ami a linearitás miatt triviálisan következik!
A második állítás triviálisan következik abból, hogy a lineáris függvényeknek csak $\pm\infty$-ben vannak "maximumai/minimumai"!

2. A három-dimenziós esetben bizonyítsa az első állítást! Adott egy ponttöltés az origótól $a$ távolságra. Bizonyítsa be, hogy a potenciál az origóban egyenlő egy $R < a$ sugarú gömb átlagpotenciáljával. A gömb központja az origó.
**Megoldás:**
A ponttöltés potenciálja, $\Phi(r) = \frac{kq}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}}$. Ekkor a potenciál az origóban, $\Phi(0) = \frac{kq}{a}$. Most, vegyük az origó körüli $R < a$ felületi integrálját a potenciálnak, ekkor mivel azimutális szimmetriánk van a következő képpen tudjuk, $\theta$ és $R$ függvényében kifejezeni a nevezőben szereplő távolságot, ahol $\theta$ most a $z$ tengellyel bezárt szög:

$$\begin{aligned} r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \rightarrow \frac{1}{4\pi R^2}\oint \mathrm{d}^2 f \Phi = \frac{1}{2R^2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin(\theta)\, \frac{kq}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} = \frac{kq}{2R^2}\frac{Ra}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rax}}\Bigg|_{-1}^{1} \\ = \frac{kq}{2R^2}\left(\frac{1}{|R-a|} - \frac{1}{R+a}\right) = \frac{kq}{R} \equiv \Phi(R) \end{aligned} \tag{27}$$

3. Vezesse le a gömb átlagpotenciálját abban az esetben, ha a töltés a gömbön belül van, azaz $a < R$!
**Megoldás:**
Ha a töltés belül van, akkor az $|R - a| = R - a$, aminek következtében az utolsó két hányados különbségénél nem esik ki $a$:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\oint \mathrm{d}^2 f \Phi = \frac{kq}{2R^2}\left(\frac{1}{|R-a|} - \frac{1}{R+a}\right) = \frac{kqa}{R^2}, \tag{28}$$

ami láthatóan nem egyezik a várt ponttöltés eredménnyel!

## VII. PONTTÖLTÉS KÉT SÍKFELÜLET KÖZÖTT

Két földelt végtelen síkfelületet $a$ távolsagba helyezünk egymástól. A síkok párhuzamosak. A két sík közé, az egyik síktól $x$ távolságra egy ponttöltést helyezünk. Mekkora a $q$-ra ható erő? Ellenőrizze az $a \rightarrow \infty$, és az $x = a/2$ eseteket!
**Megoldás:**
A két fémlapnál egyszerre kell telejsülnie a határfeltételnek, vagyis, hogy a tölés által keltett erővonalak merőlegesek a felszínén. Ekkor először tükrözzük a $q$ töltést az alsó síklapra, ekkor az alsó síklap ekvipotenciálissá válik és összesen lesz egy $(q, x)$ és egy $(-q, -x)$ töltéspárunk, majd ismételjük meg ezt a felső síklapra is, ami ad egy $(-q, 2a - x)$ tükrötöltést, ekkor azonban a két tükörtöltés terei nem adnak ekvipotenciális járulékot a fémfelületen, vagyis az alsó síklap tükörtöltését tükröznünk kell a felsőre és fordítva, a felső lap tükörtöltését tükröznünk kell az alsóra. Ami ad egy $(q, x-2a)$ és egy $(q, 2x+a)$ töltéspárt, amiket aztán ismét tökröznünk kell a korábbi módon, vagyis az alsó lap alatt

megjelent töltést a felső lapra és a felső lap felettit az alsó fémlapra. Látható, hogy az először az alsó lapra tükrözött töltésből induló töltések a következő az eredeti töltéstől mért távolságoakkal fognak menni: $r_1 = x - (-x)\,, r_2 = 2a + x - x\,, r_3 = x - (-2a - x)\,, r_1 = 2(4a + x) - x\,, \cdots \to r_{2k} = 2ka$, $q_{2k} = q$, $r_{2k+1} = 2ka + 2x\,, g_{2k+1} = -q$. Hasonló mdon a felsúlapról indított tükrözések a következő távolságokat adják: $r_1 = 2a - 2x\,, r_2 = 2a\,, r_3 = 4a \cdots \to r_{2k} = 2ka\,, q_{2k} = q\,, r_{2k+1} = 2(k+1)a - 2x\,, q = -q$. Innen már ki tudjuk számítani az erőt hiszen tudjuk a távolságokat:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{kq}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{k^2a^2} + \frac{1}{((k+1)a - x)^2} - \frac{1}{k^2a^2} - \frac{1}{(ka + x)^2} \right] = \frac{kq}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{((k+1)a - x)^2} - \frac{1}{(ka + x)^2} \right] \\
&= \frac{kq}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)(2x - a)}{((k+1)a - x)^2 (ka + x)^2},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

amit nem tudunk zárt alakban kiszámolni, azonban tekintsünk két jellegzetes/szemléletes határestet, $x = a/2$, ekkor a második felírás által látszódik, hogy a szummában minden tag éppen kinullázódik, ezért a várt módon $F = 0$ adódik! A másik határ esetben $a \to \infty$ csak az első tagot hagyjuk meg a szummából, minden más el van nyomva $1/a^2$-el

$$
F \approx -\frac{kq}{4x^2}, \tag{30}
$$

ami azt is jelzi, hogy ebben a határesetben csak az alsó lemez játszik szerepet!