Példák: Töltéseloszlás energiája, ponttöltés fogalma

FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA (ÓRAI ANYAG ISMÉTLÉSE)

Véges térrészben lokalizált folytonos töltéseloszlás esetén a töltéseloszlás létrehozásához szükséges munkát felírhatjuk a

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{1}$$

alakban. A differenciális Gauss-tétel, és a elektromos tér és a potenciál közötti összefüggés segítségével W átalakítható a

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_V E^2 d\mathbf{r} + \oint_F \Phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{f}\right), \tag{2}$$

alakra. A V és a F kifejezések térfogati és felületi integrálokat jelölnek. A felülettel a végtelenhez tartva, a térfogati integál az egész térre kiterjed, míg a felületi járulék nullához tart.

I. GÖMBSZIMMETRIKUS FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA

Adott egy q töltésű homogén eloszlású, R sugarú gömb. Számolja ki ennek a rendszernek az energiáját négyféleképpen!

- A (1) egyenlet alapján.
  Megoldás:
  Homogén eloszlás esetén a teljes töltés a megszokott módon $q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$, a potenciál a Gauss-tétel értelmében (lásd 2. Gyakorlat III./3.), $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$, ha $r < R$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{3kq}{2R}, \text{ ha } r < R \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{kq}{r}, \text{ ha } r > R,\end{aligned} \tag{3}$$

  ahol az első tagban a konstans eltolás biztosítja a potenciál folytonosságát.
  Tehát az integrálási tartomány az (1)-es egyenletben csak a gömb belsejében nem ad nullát, mivel ha $r > R$, $\rho = 0$, ahol kihasználjuk ismét, hogy gömbi koordinátákban dolgozunk és minden csak a radiális változótól függ:

$$W = 2\pi\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2\left(-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{3kq}{2R}\right)\rho = -\frac{2\pi\rho^2R^5}{30\varepsilon_0} + \frac{q\rho R^2}{4\varepsilon_0} = \frac{q\rho R^2}{5\varepsilon_0}. \tag{4}$$

- A (2) egyenlet alapján, ha a felület a végtelenben van.
  Megoldás:
  Az elektromos tér ismét a Gauss-tételből számolva:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}, \text{ ha } r < R \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \text{ ha } r > R\end{aligned} \tag{5}$$

  Az első integrált két részre kell bontanunk, míg a második zérust ad, hiszen a végtelenben a szorzat $\sim \frac{1}{R^3}$ szerint cseng le, míg a felület $\sim R^2$ szeint nő!

$$W = 2\pi\varepsilon_0\left(\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2\frac{r^2\rho^2}{9\varepsilon_0^2} + \int_R^\infty \mathrm{d}r\, r^2\frac{k^2q^2}{r^4}\right) = 2\pi\varepsilon_0\left(\frac{R^5\rho^2}{45\varepsilon_0^2} + \frac{k^2q^2}{R}\right) = 2\pi\varepsilon_0\frac{6k^2q^2}{5R} = \frac{q\rho R^2}{5\varepsilon_0} \tag{6}$$

- A (2) egyenlet alapján, ha a felület egy a sugarú gömb amely az eredeti R sugarú gömbbel koncentrikus és $a > R$.
  Ekkor ki kell számítanunk a fentebbi integrált azzal különbséggel, ahogy a második tagban csak a-ig integrálunk, illetve a felületi tagot is csak egy a sugarú gömbfelszínre kell kiszámítanunk:
$$\begin{aligned} 2\pi\varepsilon_0 \int_R^a \mathrm{d}r\, r^2 \frac{k^2q^2}{r^4} &= 2\pi\varepsilon_0 k^2 q^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right) \\ \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \frac{k^2q^2}{r^3} = 2\pi\varepsilon_0 a^2 \frac{k^2q^2}{a^3} &= \frac{2\pi\varepsilon_0 k^2 q^2}{a} \end{aligned} \tag{7}$$
  Látható, hogy a felületi tag éppen kiejti a véges a értékből eredő tagot, vagyis visszakaptuk az eredeti kifejezést a térfogati integrálon belül, a $r > R$ tartományra!

- A gömböt gömbhéjonként építjük fel, úgy, hogy minden héjon dq mennyiségű töltést kenünk szét. Mennyi munkát vegzünk, ha a "szétkenés" által a gömb sugara dr-rel növekszik? Integrálja az így kapott mennyiséget, azaz számítsa ki az R sugarú, q töltésű gömb által tárolt energiát!
  Megoldás:
  Egy r sugarú gömb, rajta dq töltés esetén először adjuk meg, mennyi munkát végzünk ha a gömbhéj sugarát dr-el megnöveljük. Ehhez ki kell számítani az energiát egy r sugarú, dr vastagságú gömbhéjra, ahol $\mathrm{d}q_r = \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi/3R^3} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{3q}{R^3} r^2 \mathrm{d}r$, illetve az ehhez tartozó potenciál, $\mathrm{d}\Phi = \frac{k\mathrm{d}q}{r} = \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{R^3 r'}$. Innen már könnyen felírható a gömbhéj energiájának megváltozása:
$$\mathrm{d}W = 4\pi \int_r^R \mathrm{d}r' \left(r'\right)^2 \rho \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{R^3 r'} = 4\pi\rho \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{2R^3} \left(R^2 - r^2\right) \tag{8}$$
  Ahonnan kiintegrálható a teljes energia is:
$$W = \int_0^R \mathrm{d}r\, 4\pi\rho \frac{3kqr^2\mathrm{d}r}{2R^3} \left(R^2 - r^2\right) = 4\pi \frac{kq\rho R^2}{5} = \frac{q\rho R^2}{5\varepsilon_0} \tag{9}$$

Mi történik az elektromos térrel és potenciállal a gömbön belül és kívül, illetve a rendszer energiájával az $R \to 0$ határesetben, ha a q töltés közben állandó marad?
Megoldás:
Míg R$\to$ 0, de $q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \equiv$ állandó:
$$W = \frac{q\rho 4\pi R^3}{3} \frac{3}{40\pi\varepsilon_0 R} \sim \frac{1}{R} \tag{10}$$
Vagyis a várt módon a ponttöltés energiája szingulárissá válik!

II. TÖLTÉSELOSZLÁS POTENCIÁLBÓL

Egy töltéskonfiguráció potenciálja
$$\Phi(\mathbf{r}) = A \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \tag{11}$$
ahol A és λ konstansok.

- Számolja ki az elektromos teret ($\mathbf{E}(\mathbf{r})$), a töltéseloszlást ($\rho(\mathbf{r})$), és a teljes töltést (Q)!
  Megoldás:
  Az elektromos teret a szokásos összefüggéseből számítjuk ki, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$
$$\mathbf{E}(r) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{A \exp(-\lambda r)}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda\right) \hat{\mathbf{r}} \tag{12}$$
  A töltés eloszlás esetében alkalmazzuk a:
$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\left(r^2 E(r)\right)}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \frac{\partial \left[\exp(-\lambda r)(1 + \lambda r)\right]}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \exp(-\lambda r) \left[-\lambda - \lambda^2 r + \lambda\right] = -\frac{A\lambda^2 \exp(-\lambda r)}{r} \equiv \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{13}$$
  Figyelem! Ha sorbafejtjük a töltéseloszlást, az első tag $\frac{A}{r}$, ami a ponttöltésnek felel meg, amirő azonban láthattuk korábban, hogy a töltése egy Dirac-deltával írható le és aminek a Laplace-ja hibásan 0- át ad.

- Ellenőrizze és egészítse ki a kapott tölteseloszlást az integrális Gauss-tétel segítségével!
Megoldás:
Vegyünk egy tetszőleges R sugarú gömböt és alkalmazzuk a Gauss-tételt, kihasználva a gömbi szimmetriáját az elektromos térnek:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi A\exp(-\lambda R)\,[1+\lambda R] \tag{14}$$

Most számoljuk ki az előző feladatban kapott töltés elsozlás általi teljes töltést egy R sugarú gömbön belül:

$$Q(R) = -\int \mathrm{d}^3\mathbf{r} A\varepsilon_0\lambda^2\frac{\exp(-\lambda r)}{r} = -4\pi\varepsilon_0 A\lambda^2\int_0^R \mathrm{d}r\, r\exp(-\lambda r) = 4\pi\varepsilon_0 A\,[(\lambda R+1)\exp(-\lambda R)-1] \tag{15}$$

A két eredmény összehasoníltásából látszik, hogy az össztöltés kiszámításánál a Gauss-tétel esetén kaptunk egy extra $Q = +4\pi\varepsilon_0 A$ járulékot, ami egy origóbeli ponttöltének felel meg, vagyis a teljes töltés eloszlás a következő:

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_0 A\lambda^2\exp(-\lambda r)}{r} + 4\pi\varepsilon_0 A\delta(\mathbf{r}) \equiv \rho_{\text{folyt}} + \rho_{\text{szing}} \tag{16}$$

- Számolja ki a rendszer energiáját és vizsgálja meg a rendszer stabilitását!
Megoldás:
A rendszer energiáját egyszerűen kiszámolhatjuk, ha szétválasztjuk a potenciált is a folytonos és a szingulráis tagokból eredő járulékokra, $\Phi = \frac{A}{r}(\exp(-\lambda r)-1) + \frac{A}{r} \equiv \Phi_{\text{folyt}} + \Phi_{\text{szing}}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{folyt}}\rho_{\text{folyt}} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{folyt}}\rho_{\text{szing}} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\Phi_{\text{szing}}\rho_{\text{folyt}} \\ &= -2\pi\int_0^\infty A\exp(-\lambda r)\varepsilon_0 A\lambda^2\exp(-\lambda r)\mathrm{d}r + 4\pi\varepsilon_0 A\left[\Phi(\mathbf{r}) - \frac{A}{r}\right]\Bigg|_{\mathbf{r=0}} = -\pi\varepsilon_0 A^2\lambda - 4\pi\varepsilon_0 A^2\lambda = -5\pi\varepsilon_0 A^2\lambda\end{aligned} \tag{17}$$

Ahol az első tag írja le a teljes potenciálban lévő folytonos közeg energiáját, míg a második tag egyszerűen a folytonos közeg potenciál ponttötlésre gyakorolt hatását írja le, ahol is a $\delta(\mathbf{r})$ hatása miatt mindenhol $r = 0$-át kellett tekintetnünk a folytonos potenciálban, amiből csak a legelső konstans értékű tag maradt meg, azaz $\frac{A}{r}(\exp(-\lambda r)-1) = -A\lambda + A\lambda^2 r + \ldots$.

III. TÖLTÉS VEZETŐN BELÜLI ÜREGBEN

Adott egy semleges, R sugarú fémgömb, melyben egy üreg található. Az üreg nem tartalmazza a gömb középpontját, viszont tartalmaz egy q nagyságú töltést az origótól a távolságra. Mi az elektromos tér a gömbön kívül? Miért nem függ az üreg alakjától vagy elhelyezkedésétől?
Megoldás:
A gömbön kívüli töltés meghatározásához használjuk ki, hogy tudjuk a fémek felületén érvényes határfeltételeket, azaz annak érdekében, hogy a fémen beül sztatikus állapot alakuljon ki a szabadon mozogható elektronok úgyrendeződnek, hogy a fém felületén az elektromos térnek csak normális komponense legyen, ami rögötn implikája, hogy egy gömb esetén ez normális komponens mindenhol ugyanakkora. Ha nem ugyanakkora lenne, az rögtön implikálna nem zérus tangenciális komponenst is! Ezt összevetve a Gauss tétellel, illetve azzal, hogy a fémgömb nem vesz fel többlet töltést a földből, egyszerűen visszakapjuk egy q nagyságú ponttöltés terét:

$$\mathbf{E}(r > R) = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{18}$$

Ez nem függ az üreg alakjától, mivel a fémes anyag határfeltétele alapján mind az üreg falánál, mind a gömb külső falánál normális irányúnak kell lennie minden pontban a térerősségnek!

IV. ELEKTROMOS TÉR → TÖLTÉSSŰRŰSÉG

Adott a következő elektromos tér:

$$E_x = ax, E_y = 0, E_z = 0, \tag{19}$$

ahol a egy konstans. Mi a $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűség? Mi a magyarázata annak, hogy az elektromos tér anizotróp, de a töltéssűrűség homogén?

Megoldás:

Ki kell számolnunk a töltéssűrűséghez, a "megszokott módon" a divergenciát:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = a \to \rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 a \tag{20}$$

Vagyis egy homogén töltéssűrűséget kpatunk, ami mégis egy anizotróp elektromos teret kelt. Ezt a következőképpen érthetjük meg:

Mivel egy differenciálegyenlet megoldása önmagában nem egyértelmű, szükséges hozzá specifikálni a határfeltételeket is, ezt legtöbbször a Poisson-egyenelt esetében tesszük meg, $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Esetünkben a potenciál $\Phi = -a\frac{x^2}{2} + \Phi_0$, de akár milyen más kombinációjú potenciál is ugyanezt a homogén eloszlást adná, $-\frac{ay^2}{2}$, $\frac{az^2}{2}$, $-\frac{ay^2}{4} + \frac{ax^2}{2}$, $\frac{a_y x^2}{2} + \frac{a_y y^2}{2} + \frac{a_z z^2}{2}, a_x + a_y + a_z = a$, stb . . . . Azt, hogy melyik (konstans erejéig) egyértelmű potenciált kell alkalmaznunk a határfeltétel szabja meg, például a fent látott eredményt adja egy nagyon egyszerű határfeltétel, $\Phi(x = 0, y, z) = 0$, aminek következtében az y^2 és z^2-es tagok csak 0 együtthatóval mehetnek.

V. DIRAC δ-FÜGGVÉNY ELŐÁLLÍTÁSA

A Dirac δ-függvény előállítható reguláris $D(x)$ függvények határértékeként:

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} D_\alpha(x), \tag{21}$$

ahol

$$D_\alpha(x) = \alpha D(\alpha x), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} D(x)dx = 1.$$

1. Mutassa meg, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_\alpha(x)dx = 1, \quad \forall\alpha \in (0, \infty)\,. \tag{22}$$

Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, D_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \alpha D(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}(\alpha x)\, D(\alpha x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, D(y) \equiv 1 \tag{23}$$

2. Mutassa meg a határértéket felhasználva, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0). \tag{24}$$

Megoldás:

Vezessük be új változónak az $y = \alpha x$ változót, mielőtt még vesszük az $\alpha \to \infty$ határértéket:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \alpha f(x)\, D(\alpha x) = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, f(y/\alpha)\, D(y) \tag{25}$$

Most vigyük be a határértéket az integrálba, ekkor $\lim_{\alpha\to\infty} f(y/\alpha) = f(0)\ \forall y$, vagyis kihozható az integrálból:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \lim_{\alpha\to\infty} f(y/\alpha)\, D(y) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y D(y) = f(0)\,. \tag{26}$$

3. Igazolja, hogy a következő függvények az $\alpha \to \infty$ limeszben úgy viselkednek mint a Dirac δ-függvény.

$$D_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2\alpha} \\ 0, & x > \frac{1}{2\alpha} \end{cases} \tag{27}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\alpha^2 x^2\right) \tag{28}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \tag{29}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(ixt) dt. \tag{30}$$

Megoldás:
Látható, hogy az első függvény integrálja 1-et ad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x D_\alpha(x) = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \mathrm{d}x \alpha = 1 \tag{31}$$

Illetve $D_\alpha(x) = \alpha \left[\Theta(x-1/2) - \Theta(x+1/2)\right]$, ami igazolja az állítást!
Látható, hogy ha $D(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$, aminek 1 az integrálja, továbbá látható, hogy

$$D_\alpha(x) = \alpha \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{\sqrt{\pi}}, \tag{32}$$

ami igazolja az állítást!
Vegyük a $D(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ kifejezést, aminek 1 az integrálja, illetve ekkor $\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \equiv \alpha D(\alpha x) \equiv D_\alpha(x)$!
Tudvalevő, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} = 1 \tag{33}$$

Ekkor $D_\alpha(x) = \alpha D(\alpha x) = \alpha \frac{\sinh(\alpha x)}{\pi x}$!

VI. DIRAC δ-FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI

A Dirac δ-függvényre igazak a következő azonosság:

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), \tag{34}$$

ahol x_n az $f(x)$ függvény n. gyöke.

1. Határozza meg a $\delta(x^2 - a^2)$ kifejezést értékét!
Megoldás:
A belső függvény két zérushelye, $x_\pm = \pm a$, ahonnan a következő adódik:

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2a} \left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] \tag{35}$$

2. Az előző eredmény alapján mutassa meg, hogy $|x|\,\delta(x^2) = \delta(x)$.
   Megoldás:
   Rendezzük át az előző feladatbeli eredményt:

$$2a\delta\big(x^2 - a^2\big) = 2x\delta\big(x^2 - a^2\big) = \delta(x - a) + \delta(x + a) \tag{36}$$

   ahol kihasználtuk, hogy $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$, illetve hogy $f(x)\,\delta(g(x)) = f(x_i)\,\delta(g(x))$, $g(x_i) = 0$, ha g-nek csak egy zérushelye van! Ekkor $2a\delta\big(x^2 - a^2\big) = 2|x|\,\delta\big(x^2 - a^2\big) = \delta(x - a) + \delta(x + a)$, ez már tetszőleges a-re igaz, $a = 0$-ra is!
   EGy másik úton is megkaphatajuk a fenti egyszerű összefüggést, tetszőleges, alkalmas függvény esetén, ahol bevezetjük az $y = x^2$ új változót:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\,\delta\big(x^2\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2|y|}\, f(\sqrt{y})\,\delta(y) = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2|y|}\,\delta(y)\,. \tag{37}$$