

Példák: Coulomb törvény, elektromos tér, potenciál

I. PONTTÖLTÉSEK TERE

1. Két egyenlő nagyságú és ellentétes előjelű (q és $-q$) ponttöltés egymástól d távolságra van.

- (a) Mekkora a potenciál és a térerősség a hely függvényében, ha az origót a két ponttöltést összekötő szakasz felezőjének választjuk?

Megoldás:

Vegyük azt az általános szituációt, amikor a $\pm q$ ponttöltések az z tengely mentén a $\mathbf{r}_{\pm} \equiv \pm d/2 \hat{\mathbf{z}}$ pozícióban helyezkednek el. Ekkor a tér egy tetszőleges $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ pontjában definíció szerint a $\pm q$ töltések által keltett potenciálok külön-külön a következőképpen írhatóak le:

$$\Phi_{\pm}(\mathbf{r}) = k \frac{\pm q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\pm}|} = k \frac{\pm q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2}}, \quad (1)$$

ahol $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Most alkalmazva a szuperpozíció elvét, azaz a két töltés által keltett *együttes potenciál* éppen a két potenciál összegével egyenlő a tér minden pontjában, azaz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_+(\mathbf{r}) + \Phi_-(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right) \quad (2)$$

Hasonló módon a tér egy adott pontjában az elektromos térerősség is két részecske által keltet térerősségek *vektoros összege*, amiket egyenként ki tudunk számítani a két potenciálból:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi_{\pm}(\mathbf{r}) = kq \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z \mp d/2)\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2)^{3/2}} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z - d/2)\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z + d/2)\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

- (b) Milyen lesz az elektromos mező, ha a két töltés nagysága és távolsága egyszerre végtelenhez tart úgy, hogy közben $\eta = \frac{q}{4\pi d^2}$ állandó marad? (Segítség: egyszerűbb a potenciált meghatározni, és utána a térerősséget ebből kiszámítani!)

Megoldás:

Először meghatározzuk a potenciált, az útmutatásnak megfelelően, ehhez először emeljünk ki a nevezőből d -vel, ami által a következő vezetőrendbel sorfejtést végezhetjük el:

$$\begin{aligned} &\frac{kq}{d} \left(\frac{1}{\sqrt{(x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d - 1/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d + 1/2)^2}} \right) \\ &= kq/d \left(\frac{1}{\sqrt{1/4 - z/d}} - \frac{1}{\sqrt{1/4 + z/d}} \right) + o\{1/d^2\} = kq/d(2 + 4z/d - (2 - 4z/d)) + o(1/d^2) = 8kqz/d^2 + o(1/d^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Tehát a vezetőrendbeli sorfejtés során minden a két nevezőből adódó $1/d^2$ vagy magasabb rendű tagot elhagyunk. Innen már nagyon könnyű meghatározni az elektromos térerősséget:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -8 \frac{kq}{d^2} \hat{\mathbf{z}} + o(1/d^2) = -8 \frac{\eta}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

Értelmezzük ezt a kifejezést, két végtelen nagy töltés végtelen messzire egymástól olyan elektromos tert kel az origótól "nem túl messzi pontokban", $x_i/d \ll 1$, ami vezetőrendben homogén z irányúnak érződik!

II. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK EXPLICIT INTEGRÁLÁSSAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét és potenciálját a megadott pontokban! Ellenőrizze az $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$ összefüggést!

- Adott egy L hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálca egyik felezőpontjától a pálcára merőlegesen z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg L$ esetet!

Megoldás:

Legyen a pálca felső és alsó végpontja z tengely mentén a $\pm L/2$ pontokban. Ekkor válasszunk a z' pontban egy dz infinitezimális hosszúságú pontot, $dq = dz\lambda$ infinitezimális nagyságú töltéssel, illetve az ehhez tartozó $d\Phi(z') = k \frac{dq}{\sqrt{z^2 + (z')^2}}$. Most ismét használva a szuperpozíció elvét, azaz a teljes pálca potenciálja egyszerűen csak az infinitezimális járulékok összege, azaz integrálja:

$$\Phi(z) = \int_{-L/2}^{L/2} dz' k\lambda \frac{1}{\sqrt{z^2 + (z')^2}} = 2k\lambda \text{arsh} \left(\frac{L}{2z} \right). \quad (6)$$

Hasonlóan járunk el az elektromos térerősség esetében is, azaz kiszámítjuk először egy z' infinitezimális hosszúságú darabra a $dE(z) = k\lambda \frac{dz'}{z^2 + (z')^2}$, aminek a vetülete a pálcára merőleges irányra, amit most z -vel jelölünk a feladat konvenciója alapján, $dE_z(z) = dE(z) \cos \varphi = \frac{k\lambda dz'}{z^2 + (z')^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + (z')^2}}$, majd alkalmazva ismét a szuperpozíció elvét a következőt kapjuk az felintegrálás után:

$$k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{z}{(z^2 + (z')^2)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{z} \int_{-L/2z}^{L/2z} dz' \frac{1}{(1 + (z')^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Ahol áttértünk a $z' \rightarrow z'/z$ új változóra, most bevezetve új változónak az $\tan x = z'$ -ot, $dz' = \frac{1}{\cos^2 x} dx$:

$$\frac{k\lambda}{z} \int_{-\arctg(L/2z)}^{\arctg(L/2z)} dx \frac{1}{\cos^2 x} \cos^3 x = \frac{k\lambda}{z} \int_{-\arctg(L/2z)}^{\arctg(L/2z)} dx \cos x = \frac{2k\lambda}{z} \sin(L/2z) = \frac{2k\lambda}{z} \frac{L/2z}{\sqrt{1 + (L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z} \frac{1}{\sqrt{(2z/L)^2 + 1}}, \quad (8)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$. Látható, hogy ez éppen a negatív z szerinti deriváltja a fentebb kiszámított potenciálnak, hiszen $-\partial_z (2k\lambda \text{arsh}(\frac{L}{2z})) = \frac{2k\lambda}{2} \frac{L/z^2}{\sqrt{1 + (L/2z)^2}} = \frac{2k\lambda}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + (2z/L)^2}}$.

Most vizsgáljuk meg a $z \gg L$ határesetet, ekkor fejtsük sorba a potenciálban lévő kifejezést, $\text{arsh}(L/2z) = L/2z + o((L/z)^3)$, illetve hasonló módon a térerősségben lévő kifejezést is, $\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + (2z/L)^2}} = \frac{L}{z^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (2L/z)^2}} = \frac{L}{z^2} + o(L^3/z^4)$

$$\Phi(z) = \frac{k\lambda L}{z} + o((L/z)^3) \quad (9)$$

$$E_z(z) = \frac{k\lambda L}{z^2} + o(L^3/z^4) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{k\lambda L}{z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (10)$$

Ami megfelel a várakozásainknak, hiszen egyrészt vezetőlendben is teljesül, hogy $E_z(z) = -\partial_z \Phi(z)$, illetve egy ponttöltés tereit kaptuk vissza!

- Adott egy R sugarú gyűrű, λ töltéssűrűséggel. A pont legyen a gyűrű középpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$ esetet!

Megoldás:

Paraméterezzük az infinitezimális kerületi darabokat a $d\theta$ infinitezimális szöggel, amihez a körgyűrű darab $dl = d\theta R$, a töltés $dq = \lambda R d\theta$. A kör középpontjától való távolság állandó, $\sqrt{R^2 + z^2}$, vagyis az infinitezimális potenciál járulékok mind szögfüggetlenek, $d\Phi = k\lambda \frac{R d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}}$. A teljes potenciál ismét ezek összege a szuperpozíció elvének megfelelően:

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} d\theta k\lambda \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{2\pi R k\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (11)$$

Hasonlóan kiszámítható a térerősség is, mivel egy infinitezimális darab térerősségének nagysága, $dE(z) = k\lambda \frac{Rd\theta}{R^2+z^2}$, továbbá az (x, y) síkon való szimmetria miatt $E_{x,y} = 0$, illetve dE_z a $dE(z)$ vetülete a z tengelyre, $dE_z = \cos \varphi dE(z) = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} dE = \frac{kRz\lambda d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{kRz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi Rkz\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k2\pi R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (12)$$

Látható, hogy $-\partial_z \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, ami igazolja az $E_z(z) = -\partial_z \Phi(z)$ összefüggést.

Megvizsgálva a $z \gg R$ határesetet először a potenciál esetén a következő sorfejtés kell végrehajtanunk:

$$\frac{2\pi Rk\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} = 2\pi Rk\lambda \frac{1}{z} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} + o(z^4/R^4) \right) = \frac{2\pi Rk\lambda}{z} + o(R^3/z^3) \quad (13)$$

ahol az utolsó lépésben csak a legalacsonyabb rendű $1/z$ -s tagot hagytuk meg. Innen egyszerűen meg lehet adni a térerősséget, $E_z = -\partial_z \Phi(z) = \frac{2\pi Rk\lambda}{z^2}$. Vagyis "nagyon messziről" nézve a körgyűrű ponttöltésnek látszódik, ahol a megjelenő "effektív ponttöltés" a kör teljes, $q = 2\pi k\lambda$ töltése.

3. Adott egy R sugarú korong, amelyen σ mennyiségű homogén töltéssűrűség helyezkedik el. A pont legyen a korong középpontjától z távolságra. Ellenőrizze a $z \gg R$, és az $R \gg z$ eseteket!

Megoldás:

Mivel tudjuk, hogy egy r sugarú homogén töltéseloszlású kör potenciálja, illetve elektromos tere, $dq = 2\pi r dr \sigma$ össztöltés esetén:

$$d\Phi(z) = \frac{2\pi k r \sigma dr}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad (14)$$

$$dE_z(z) = \frac{2\pi k r \sigma z dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \quad (15)$$

Felösszegezve minden ilyen dr vastagságú körívre 0-tól R -ig a következő eredmények adódnak:

$$\Phi(z) = \int_0^R dr \frac{2\pi k \sigma r}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z| \right),$$

$$E_z(z) = \int_0^R dr \frac{2\pi k r \sigma}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 2z\pi k \sigma \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) = 2\pi k \sigma \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(z) \hat{\mathbf{z}}.$$

Rögtön látható, hogy teljesül a $E_z(z) = -\partial_z \Phi(z)$, mivel $-\partial_z |z| = -\text{sgn}(z)$, illetve $-\partial_z \sqrt{R^2+z^2} = -\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$.

Most vizsgáljuk meg a $R \gg z$ határesetben $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = R + \frac{z^2}{2R} - |z| + o(z^3/R^2) = R \left(1 - \frac{|z|}{R} + o(z^2/R^2) \right)$, ahol az utolsó lépésben, kiemelve R -el a zárójelen belül elhagyhattunk minden z/R -nél magasabb rendű tagot, vagyis az adott határesetben a potenciál, illetve a megfelelő deriválás utána térerősség, $E_z(z) = -\partial_z \Phi(z)$:

$$\Phi(z) \approx 2\pi k R \sigma \left(1 - \frac{|z|}{R} \right) \quad (16)$$

$$E_z(z) \approx 2\pi k \sigma \text{sgn}(z) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi k \sigma \text{sgn}(z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (17)$$

Az eredmény híven tükrözi azt amit vártunk, a körlap méreténél jóval közelebb a körlaphoz a tér vezetőrendben visszaadja a kondenzátoroknál tanult kifejezést!

Most az ellenkező határeset, $z \gg R$: $\sqrt{R^2+z^2} - |z| = \frac{R^2}{2|z|} + o(R^2/z^3)$, innen egyszerűen ismét a potenciál és a belőle származtatott elektromos tér:

$$\Phi(z) \approx \frac{\pi k \sigma R^2}{|z|}$$

$$E_z(z) \approx \frac{\pi k \sigma R^2}{z^2} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{\pi k \sigma R^2}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

Ami ismét nem másnak felel meg mint annak az esetnek, amikor nagyon messziről tekintve egy töltés elrendezést, az vezetőrendben ponttöltésnek látszódik, a rendszerben lévő össztöltéssel!

III. ALAPVETŐ ELEKTROMOS TÉR SZÁMOLÁSOK A GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL

Számolja ki a következő rendszerek elektromos térerősségét a megadott pontokban!

1. Adott egy végtelen hosszúságú pálca λ mennyiségű homogén töltéssűrűséggel. A pont legyen a pálcától r távolságra. Vesse össze az eredményt a véges pálcára talált eredménnyel, ha a pálca hossza a végtelenbe tart!

Megoldás:

Vegyünk egy henger felületet egy tetszőleges r távolságnál a z tengellyel párhuzamosan, amely a Gauss-tételben megjelenő felületként fog szolgálni, ekkor a végtelen hosszú vonalat körbeölelő hengerfelületre a Gauss-tétel:

$$\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (18)$$

Esetünkben egy hengereszimmetrikus teret integrálunk egy fix r sugarú hengerre: $\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi r \int_0^L dz E(r) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$.

$$\mathbf{E}(r) = E_r(r) \hat{\mathbf{r}} = \frac{2k\lambda}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (19)$$

Ahol a vonalvezető végtelen hossza miatt a rendszer translációs szimmetriával bír, vagyis tetszőleges véges L darabon érvényesnek kell lennie a Gauss-tételnek!

A véges méretű pálca esetén a következő erdményt kaptuk, $E_r(r) = \frac{2k\lambda}{r} \frac{1}{\sqrt{(2r/L)^2+1}}$, most sorbafejtve vezetőrendig:

$$E_r(r) \approx \frac{2k\lambda}{r} \quad (20)$$

mivel legelső rendben $\frac{1}{\sqrt{(2r/L)^2+1}} = 1 + o((r/L)^2)$.

2. Adott egy végtelen felület σ töltéssűrűséggel. A pont legyen a felülettől z távolságra. Vesse össze az eredményt a véges sugarú korongra talált eredménnyel, ha a korong sugara a végtelenbe tart!

Megoldás:

Ismét alkalmazzuk a Gauss-tételt, ehhez vegyünk a végtelen felülettől $\pm z$ távolságra lévő végtelen felületeket, a rendszer 2 dimenziós translációs szimmetriája miatt ismét elegendő tekintenünk egy A területű négyzetet a Gauss-tételhez, illetve ekkor az elektromos tér is csak a z irányú lehet és csak z -től függhet:

$$\oint_A d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2AE_z(z) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (21)$$

ahol az $\text{sgn}(z)$ eredete, hogy a Gauss-tétel felírása előtt már ilyen irányúnak tételeztük fe la teret szimmetriaia megfontolásokból. Összevetve a körlapra kapott eredményünkkel, ahol a véges sugar esetén $E_z(z) = 2\pi k\sigma \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$, ami vezetőrendben, ha $R \gg z$, $\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{1+(z/R)^2}} = \text{sgn}(z) + o(z/R)$, vagyis a $z/R \ll 1$ limeszben éppen visszakapjuk, hogy $E_z(z) = 2\pi k\sigma \text{sgn}(z)$.

3. Adott egy R sugarú gömb amelynek térfogati töltéssűrűsége ρ , felületi töltéssűrűsége σ . Számolja ki a gömb elektromos terét valamint potenciálját az $r < R$ és $r > R$ régiókban a Gauss tétel segítségével! Igazolja, hogy a felületi töltéssűrűség az elektromos térerősségben $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ nagyságú ugrást okoz!

Megoldás:

Vegyünk egy tetszőlegs $r < R$ sugarú gömböt amiben összesen $Q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ töltés helyezkedik el, ekkor az r sugarú gömbfelszínt tekintve a Gauss-tételben, az elektromos tér gömbszimmetrikussága miatt:

$$\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{kQr}{R^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (22)$$

Most tekintsük a gömbön kívüli teret, amikor az $r > R$ sugarú gömb magában foglalja a gömb teljes töltését, $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$, illetve amihez még hozzá kell vennünk a felületen lévő töltéseket is, $Q \rightarrow Q + 4\pi R^2 \sigma$ ekkor hasonló megfontolások alapján a következő Gauss tételt írhatjuk fel:

$$\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r E_r(r) = \frac{Q + 4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{k(Q + 4\pi R^2 \sigma)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (23)$$

Most megmondhatjuk, mekkora a változása az elektromos térnek a felületen lévő töltéseknek köszönhetően, $\Delta E_r \equiv E_r(R+0) - E_r(R-0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

IV. GAUSS TÉTEL ALKALMAZÁSA - INHOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁSOK

(Megoldást ld. a weblapon.)

Számolja ki az elektromos teret a következő esetekben. Készítsen vázlatot is róla a releváns távolság függvényében.

1. $\rho(r) = \alpha r$ inhomogén töltéssűrűségű, R sugarú gömb esetében, az origótól r távolságra.

Megoldás:

Vegyünk ismét egy tetszőleges r sugarú gömbfelületet a Gauss-tételhez, ekkor a tér gömbszimmetrikussága miatt $\oint d^2\mathbf{f} \mathbf{E}(r) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$, ahol a töltést explicit térfogati integrálással tudjuk meghatározni:

$$Q(r) = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^r dr' (r')^2 \alpha r' = 4\pi \alpha \frac{r^4}{4} = \alpha \pi r^4, \quad (24)$$

ahonnan a tér $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$.

2. Egy bizonyos régióban az elektromos tér $\mathbf{E} = kr^3 \hat{\mathbf{r}}$ (gömbkoordinátákban), ahol k egy konstans.

- (a) Számolja ki a teljes töltést, amelyet egy R sugarú origó középpontú gömb tartalmaz!

Megoldás:

Alkalmazzuk visszefe a Gauss-tételt, vagyis hasonlóan eljárva mint a korábbi példákban egy R sugarú gömbre vett felületi integrál értéke:

$$4\pi R^2 E_r(R) = 4\pi k R^5 = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0} \rightarrow Q(R) = 4\pi k R^5 \varepsilon_0. \quad (25)$$

- (b) Számolja ki a töltéseloszlást!

Megoldás:

Definíció szerint $dQ(R) = \rho(R) 4\pi R^2 dR$, ahol

$$dQ(R) = Q(R + dR) - Q(R) = \frac{dQ(R)}{dR} dR = 20\pi k \varepsilon_0 R^4 dR = \rho(R) 4\pi R^2 dR \rightarrow \rho(R) = 5\varepsilon_0 k R^2. \quad (26)$$

V. ELEKTROMOS KETTŐSRÉTEG

(Nem került sorra.)

1. Adott két R sugarú körlap, az egyik $+\sigma$, a másik $-\sigma$ egyenletes töltéssűrűséggel, úgy, hogy össztöltésük $\pm Q$. A két körlap egymással párhuzamosan helyezkedik el az xy síkkal párhuzamosan, középpontjuk a z tengelyen a $\pm\delta/2$ pontokban van.

- (a) Írjuk fel a két körlap eredő elektromos térerősségét a z tengely mentén!

Megoldás:

Tudjuk a II/3-as feladatból, hogy ekkor a két tér ellentétes irányú $E_z^\pm(z) = \pm 2\pi k \sigma \left(\operatorname{sgn}(z) - \frac{z \mp \delta/2}{\sqrt{R^2 + (z \mp \delta/2)^2}} \right)$, ahonnan a teljes tér:

$$E_z(z) = 2\pi k \sigma \left(\operatorname{sgn}(z + \delta/2) - \operatorname{sgn}(z - \delta/2) + \frac{z - \delta/2}{\sqrt{R^2 + (z - \delta/2)^2}} - \frac{z + \delta/2}{\sqrt{R^2 + (z + \delta/2)^2}} \right) \quad (27)$$

- (b) Vegyük azt a határesetet, amikor $\delta \rightarrow 0$ úgy, hogy $\sigma\delta = \tau$ állandó marad (elektromos kettősréteg τ felületi dipólsűrűséggel)! Mennyi az elektromos térerősség a z tengely pontjaiban?

Megoldás:

Most fejtsük sorba a $\sigma \frac{z \mp \delta/2}{\sqrt{R^2 + (z \mp \delta/2)^2}}$ kifejezést, ahol $\sigma \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, úgy hogy $\sigma\delta = \text{áll.}$:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{z \mp \delta/2}{\sqrt{R^2 + (z \mp \delta/2)^2}} &= \sigma \frac{z \mp \delta/2}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z \mp \delta/2}{R}\right)^2}} \approx \sigma \frac{z \mp \delta/2}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (z/R)^2 \mp z\delta/R^2}} \\ &\approx \sigma \frac{z \mp \delta/2}{R\sqrt{1 + (z/R)^2}} \left(1 \pm \frac{z\delta}{2R^2(1 + (z/R)^2)}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

Most vége a két tag különbségét, látható, hogy csak a $\sim \mp \frac{\sigma\delta/2}{R\sqrt{1+(z/R)^2}}$ és a $\sim \pm \frac{z^2\sigma\delta}{2R^3(1+(z/R)^2)^{3/2}}$ tagok fognak megmaradni:

$$E_z(z) = 2\pi k \frac{\sigma\delta}{R^3\sqrt{1+(z/R)^2}} \left(\frac{z^2}{1+(z/R)^2} - R^2 \right) = -\frac{2\pi\tau}{R(1+(z/R)^2)^{3/2}} \quad (29)$$

Ezt követően már csak a kettő sgn függvényt kell megfelelően sorbafejtenünk, $2\pi k\sigma\text{sgn}(z \pm \delta/2) = 2\pi k\sigma\text{sgn}(z) \pm 2\pi k\tau\delta(z)$, amiből az első tag kiesik a \pm -os tagok összegzése után, tehát végeredményben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\tau \left(\delta(z) - \frac{1}{R(1+(z/R)^2)^{3/2}} \right) \quad (30)$$

- (c) Számolja ki az elektromos potenciált a $z > 0$ és a $z < 0$ félegyenések mentén! Mennyi a kettős réteg két oldala között a potenciálkülönbség? Mi ennek a szemléletes fizikai magyarázata?

Megoldás:

Most számítsuk ki ismét hasonló sorfejtések segítségével a portenciálkülönbséget a két réteg között, ahol a potenciál $\Phi_{\pm}(z) = \pm 2\pi\sigma \left(\sqrt{R^2 + (z \mp \delta/2)^2} - |z \mp \delta/2| \right)$. Sorba fejtvé az első tagot, először a gyök alatt vezetőrendig δ szerint, $\sqrt{R^2 + z^2 \mp z\delta} \approx \sqrt{R^2 + z^2} \left(1 \mp \frac{z\delta}{2R^2+z^2} \right) = \sqrt{R^2 + z^2} \mp \frac{z\delta}{2\sqrt{R^2+z^2}}$, amiből a két tag különbségét vége csak a második fog megmaradni, $\Phi_+(z) + \Phi_-(z) \rightarrow \frac{z\delta}{\sqrt{R^2+z^2}}$. Most végezzük el a vezetőrendbeli sorfejtését a $|z \mp \delta/2|$ tagnak:

$$|z \mp \delta/2| = |z| \mp \delta/2 \text{sgn}(z) \quad (31)$$

amiből a két tag összeadása után csak a $\delta/2 \text{sgn}(z)$ marad meg, összességében a potenciálra a következő kifejezést adva:

$$\Phi(z) = 2\pi\tau \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{\text{sgn}(z)}{2} \right), \quad (32)$$

Látható, hogy telejsül ismét a $E_z(z) = -\partial_z\Phi(z)$ összefüggés, hiszen $\partial_z\text{sgn}(z) = 2\delta(z)$, illetve $-\partial_z \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{-1}{R(1+(z/R)^2)^{3/2}}$.