1. Elektrodinamika gyakorlat
Vektor kalkulus - ismétlés

Jelölések:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \nabla f \\ \text{div } \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

ahol

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

a nabla operátor, $\cdot$ a skaláris és $\times$ a vektoriális szorzatot jelöli. A Laplace operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

I. SZORZATOK DERIVÁLÁSA

Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat!

1.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

Megoldás:
Alkalmazzuk az indexes jelölésmódot, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i$ vektormező esetén a **divergencia**, ami egy **skalármennyiség** és az Einstein konvenció alapján az i index szerinti összegzés értendő, illetve $(\nabla \cdot f)_i = \partial_i f$, skalártér esetén a **gradiens**, ami egy **egy vektormennyiség**, i a vektor komponenseit indexeli, ami a skalártér/többváltozós függvény i. parciális deriváltja.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \partial_i (f\mathbf{v})_i = \partial_i (f v_i) = (\partial_i f)\, v_i + f(\partial_i v_i) = (\nabla f)_i\, v_i + f(\nabla v) = (\nabla \cdot f)\,\mathbf{v} + f(\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{1}$$

2.

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

Megoldás:
Ismét alkalmazzuk a **rotációnál** tanult indexes kifejezést, $(\nabla \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$, illetve hasonlóan két vektor keresztszorzata esetén, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$. Alkalmazva a divergencia indexes kifejtését:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \partial_i (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \partial_i (\varepsilon_{ijk} u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \left[\partial_i (u_j)\, v_k + u_j \partial_i (v_k)\right], \tag{2}$$

ahol az utolsó lépésben egyszerűen csak alkalmaztuk az $u_j v_k$ szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt. Az összeg első tagja ezt követően a Levi-Civita szimbólum indexeit ciklikusan permutálva, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$, a következőképpen írható fel:

$$v_k \varepsilon_{ijk} \partial_i u_j = v_k \varepsilon_{kij} \partial_i u_j = v_k (\nabla \times \mathbf{u})_k \equiv (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \tag{3}$$

A második tag esetén hasonlóan járunk el, azzal különbséggel, hogy most a Levi-Civita szimbólum antiszimmetrikus tulajdonságát használjuk fel, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$:

$$u_j \varepsilon_{ijk} \partial_i v_k = -u_j \varepsilon_{jik} \partial_i v_k = -u_j (\nabla \times \mathbf{v})_j \equiv -\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}). \tag{4}$$

Összerakva a (**??**)-es egyenlet két tagját a végeredmény egyezik a kívánt kifejezéssel! Természetesen mindenhol, ahol kétszer fordult elő egy index, függetlenül attól, hogy ezt éppen milyen betűvel jelöltük, összegzést kellett érteni az Einstein-konvenciónak megfelelően!

II. GRADIENS/GAUSS/STOKES-TÉTEL

1. Adott a következő vektormező:

$$\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{\mathbf{y}} + (4yz^2)\hat{\mathbf{z}}. \tag{5}$$

Adott ezenkívül a következő felület: egy egységnégyzet, amelynek az egyik sarka az origóban, két oldala pedig a pozitív y, z tengelyek mentén találhatók.

(a) Számolja ki a vektormező rotációját!
Megoldás:
Azokban az esetekben, amikor ismerjük a vektormező alakját egy adott koordináta-renszerben, előnyösebb a rotáció (avagy egyéb differenciál operátor) ismert alakját használni, ami a legegyszerűbb esetben, Descartes koordináta-rendszerben a következő:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Esetünkben $v_x = 0$, $v_y = 2xz + 3y^2$, $v_z = 4yz^2$, ahonnan $\partial_y v_x = \partial_z v_x = 0$; $\partial_x v_y = 2z$, $\partial_z v_y = 2x$; $\partial_x v_z = 0$, $\partial_y v_z = 4z^2$, aminek segítségével visszahelyettesítve (**??**)-ba:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 4z^2 - 2x \\ 0 \\ 2z \end{bmatrix} \tag{7}$$

(b) Ellenőrizze a Stokes-tétel érvényességét erre a vektorfüggvényre az adott felületen!
Megoldás:
Az egységnégyzet széleinek koordintátái: $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)$, a pontokat összekötő élek mentén vett vonalintegrál elvégzéséhez a természetes paraméterezés a $t \in [0,1]$ segédváltozó segítségével, illetve feltüntetve a vektormező t függését is:

$$\begin{aligned}
&x(t) = 0 \\
&(0,0,0) \to (0,1,0) : y(t) = t, z(t) = 0, v_y(t) = 3t^2, v_z(t) = 0, \\
&(0,1,0) \to (0,1,1) : y(t) = 1, z(t) = t, v_y(t) = 3, v_z(t) = 4t^2, \\
&(0,1,1) \to (0,0,1) : y(t) = 1 - t, z(t) = 1, v_y(t) = 3(1-t)^2, v_z(t) = 4(1-t), \\
&(0,0,1) \to (0,0,0) : y(t) = 0, z(t) = 1 - t, v_y(t) = 0, v_z(t) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

A vonalmenti integrálást a megszokott módon végezzük el: $\int_C \mathrm{d}\mathbf{r}\, v(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{t}))$
$\equiv \int_0^1 \mathrm{d}t\ [\dot{x}(t)v_x(t) + \dot{y}(t)v_y(t) + \dot{z}(t)v_z(t)]$, ami tetszőleges egymás utáni szakaszdarabokra is igaz.
Beírva ezeket az értékeket és véve a megfelelő szakaszokat, összességében elegendő egy integrált leírnunk, mivel mind a négy szakasz mentén az integrálási t változó 0-tól 1-ig változik.

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\ \left[3t^2 + 4t^2 - 3(1-t)^2\right] = 4/3. \tag{9}$$

Most a Stokes-tétel alapján teljesülnie kell(ene), hogy erre az egységnégyzetre vett felületi integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőnek megegyezik a fenti vonalintegrálás által kapott értékkel! A Stokes tétel alapján $\int_{C=\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}))$, a vektortér rotációjának adott felületre vett integrál értéke megegyezik a felület határán húzódó görbére vett vonalintegrállal.
Felületi integrálok kiszámításához, kettő segédparméterre van szükségünk, $(u,v) \in [0,1]^2$, ami paraméterezi a felületet, esetünkben ezekkel a következőképpen fejezhetjük ki az x, y, z koordináta változókat, illetve a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér elemeit:

$$\begin{aligned}
&x(u,v) = 0,\ y(u,v) = u,\ z(u,v) = v \\
&v_x(u,v) = 0,\ v_y(u,v) = 3u^2,\ v_z(u,v) = 4uv^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Ekkor afelületi integrál egyszerűen, tudva, hogy felület normális vektora $-x$ irányú, $\mathrm{d}^2\mathbf{f} = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,\hat{\mathbf{x}}$

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v\ \hat{\mathbf{x}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))) = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v\ \hat{\mathbf{x}} \cdot \begin{bmatrix} 4v^2 \\ 0 \\ 2v \end{bmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v\, 4v^2 = 4/3. \tag{11}$$

Láthatóan a két eredmény megegyezik, engedelmeskedve a Stokes-tételnek!

III. PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Mutassa meg a következő azonosságokat! Az $\int_V \ldots d^3\mathbf{r}$, $\int_F \ldots d^2\mathbf{f}$, $\int_C \ldots d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1.

$$\int_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3\mathbf{r} = -\int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d^3\mathbf{r} + \int_F f\mathbf{A} \cdot d^2\mathbf{f}. \tag{12}$$

Megoldás:
Használjuk az 1. feladatban levezetett azonosságot, $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$. Ezt kombinálva a Gauss-Osztrogatszkij törvénnyel, $\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\ \mathbf{v}(\mathbf{r})$, vagyis adott térfogatra vett integrálja egy tetszőleges vektormező divergenciájának megegyezik a vektormezőnek térfogatot lezáró zárt felülere vett integráljával, a következő adódik:

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \int_{F=\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\ f\mathbf{A} = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \mathbf{A} \cdot (\nabla f) + \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ f(\nabla \cdot \mathbf{A}). \tag{13}$$

Ezt átrendezve már könnyedén következik a bizonyítani kívánt egyenlőség.

2.

$$\int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_F d^2\mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{14}$$

Megoldás:
Használjuk fel az előző részfeladatban kapott összefüggést, az $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, illetve $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ megfeleltetésekkel! Ekkor egyszerűen kiszámolható a ∇f, ugyanis tudjuk, hogy egyrészt $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, illetve

$$\partial_i \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3} \to \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{15}$$

Innen pedig, mivel csak konstans eltolást, illetve egy -1-el való szorzást alkalmaztunk az argumentumban, $\frac{1}{|\mathbf{r}|} \to \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$, a kérdéses gradiens is hasonlóan adható meg:

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \tag{16}$$

Tehát beláttuk, hogy ha (most, midőn az integrálási változó az $\mathbf{r}'$) $\mathbf{A}(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}')$, illetve $f(\mathbf{r}') \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, visszakapjuk az első részfeladatban belátott összefüggést, ahol még átrendeztük a két térfogati tagot a túloldalra, amivel az állításunkat beláttuk.

IV. A GAUSS ÉS A STOKES TÉTELBŐL KÖVETKEZŐ TOVÁBBI TÉTELEK

Bizonyítsa be a következő állításokat! Az $\int_V ...d^3\mathbf{r}$, $\int_F ...d^2\mathbf{f}$, $\int_C ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1. $\int_V (\nabla T) d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial V} T d^2\mathbf{f}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ kifejezésre (ahol $\mathbf{c}$ egy konstans vektor), és alkalmazza a szorzatmezők deriválására érvényes szabályokat.}
   Megoldás:
   Használjuk a segítséget, azaz vegyük az általános kifejezést, az általánosság megcsorbítása nélkül, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{c}T$, ahol $\mathbf{c}$ egy konstans értékű vektor. Ekkor a $\mathbf{v}$ vektormezőre hatatva a nabla operátort, azaz véve annak divergenciáját az 1. feladat alapján egyszerűen $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{c}T) = \mathbf{c} \cdot \nabla T$. Ennek ismeretében alkalmazzuk a Gauss-tételt a $\mathbf{v}$ vektormezőre:

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \nabla \cdot (\mathbf{c}T) = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \mathbf{c} \cdot \nabla T = \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\ \mathbf{c}T. \tag{17}$$

   Mivel $\mathbf{c}$ egy konstans értékeű vektor kihozható az integrálás elé, ekkor az második kifejezést, $\mathbf{c} \cdot \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\nabla T$, úgy kell értelmeznünk mint a $\mathbf{c}$ vektor és az infinitezimális térfogatelemekkel beszorzott ∇T gradiensek összegének, ami továbbra is egy vektor, a skalárszorzatát. A harmadik tag esetén, $\mathbf{c} \cdot \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\ T$, pedig arról van szó, hogy a $\mathbf{c}$ vektort skalárisan szorozzuk a $\mathrm{d}^2\mathbf{f}$ infinitezimális felület vektorok és T adott felületi pontban felvett értékek szorzatainak összegéből kapott vektorral. Vagyis ekkor minden $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ és így minden $\mathbf{c}$ esetén teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{c} \cdot \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\nabla T = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f}\ T, \tag{18}$$

   ami viszont csak úgy lehetséges, ha a $\mathbf{c}$-el skalárisan szorzott két tag is megegyezik, a 3 dimenziós szokásos skalárszorzatos tér teljessége miatt, amivel állításunkat igazoltuk!

2. $\int_V [T\nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial V} (T\nabla U) \cdot d^2\mathbf{f}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = T\nabla U$ kifejezésre.}

   {Megjegyzés: Ez **Green 1. azonossága.**}
   Megoldás:
   Az útmutatásnak megfelelően ismét alkalmazzuk a Gauss-tételt, de most a $\mathbf{v} = T\nabla U$ kifejezésre. Ekkor ismét az 1. feladat alapján, illetve a Laplace operátort $\Delta \equiv \nabla^2$ módon jelölve az egyértelműség kedvéért:

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\nabla \cdot (T\nabla U) = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \nabla T \cdot \nabla U + T\nabla^2 U = \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\mathbf{f} \cdot (T\nabla U) \tag{19}$$

   Ahol csak alkalmaztuk, mégegyszer kihangsúlyozva, hogy $\nabla \cdot (T\nabla U) = \nabla T \cdot \nabla U + T\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla T \cdot \nabla U + T\nabla^2 U$, illetve a második egyenlőségnél alkalmaztuk a Gauss-tételt!

V. DIRAC δ-FÜGGVÉNY

1. Vázolja fel a

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{20}$$

   vektorfüggvény "erővonalait" ($\mathbf{r} = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

2. Számolja ki $\mathbf{v}$ divergenciáját. Miért meglepő ez az eredmény a felvázolt vonalakkal összehasonlítva?
   Megoldás:
   A divergencia operátor gömbi koordinátrendszerben:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{21}$$

   ahol $v_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}$, $v_\theta = \hat{\theta} \cdot \mathbf{v}$, $v_\varphi = \hat{\varphi} \cdot \mathbf{v}$. Esetünkben $v_\varphi = v_\theta = 0$, $v_r = \frac{1}{r^2}$. Ekkor a divergencia kiszámításánál csak az (**??**)-es egyenlet első tagját kell tekintenünk:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right)}{\partial r} = 0, \tag{22}$$

mivel egy konstanst kell deriválnunk r szerint! Ez azt sugallaná, hogy ez az erőtér forrásmentes, ami intuitívan ellentmond annak az erővonalképnek, ami nyilávnvalóan olyan képet ad nekünk, mintha az erővonalak egy pontszerű forrásból származnának.

3. A Dirac δ-függvény segítségével megoldhatjuk a fenti “paradoxont.” A

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{23}$$

vektormező divergenciája nulla minden pontban, az origó kivételével, ahol viszont szinguláris. A háromdimenziós Dirac δ-függvény definíciójából kiindulva

$$\int_V d^3\mathbf{r}\delta^3(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{0}). \tag{24}$$

A Gauss tétel

$$\int_V d^3\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \int_F d^2\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{25}$$

segítségével mutassa meg, hogy

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{26}$$

valamint, hogy

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}). \tag{27}$$

Megoldás: A hiba tehát onnan származik, hogy a $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ az $r = 0$ nincs definiálva, ott a vektortér szinguláris. Hogy feloldjuk az ellentmondást és információt szerezhessünk arról, hogy miként lehet értelemzni ennek a divergenciát az $r = 0$-ban, tekintsük a térfogati integrálját egy R sugarú gömbön belül a kérdéses kifejezésnek, $\nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right)$ és használjuk a Gauss-tételt:

$$\int_{V_R} \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \oint_{F=\partial V_R} \mathrm{d}^2\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{28}$$

A felületi integrálnál a sugár hossza állandó, $r = R$, továbbá ha áttérünk gömbi koordinátákra, az integrálási mérté ka következő alakot ölti, $\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,R^2\hat{\mathbf{r}}$:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}R^2\frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\,\sin\theta = 4\pi. \tag{29}$$

Vagyis adott egy kifejezés, “függvény” minden $\mathbf{r} \in R^3$
$left\mathbf{0}$ zérus, míg a nullában oly módon szinguláris, hogy az itnegrálja minden $R > 0$ esetén:

$$\int_{V_R} \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\nabla\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 4\pi \tag{30}$$

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $\nabla\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$.

VI. VEKTOR DERIVÁLT SZÁMOLÁSOK

Számolja ki az alábbi deriváltakat!

1. $\mathrm{rot}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$
Megoldás:
Alkalmazzuk ismét az indexes számolást, illetve a korábban az $\frac{1}{r}$-re levezetett szabályt általánosan, $\partial_i f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{x_i}{r} \to \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\partial_r f(r)$

$$rot\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kln}\partial_j\left(\frac{m_l x_n}{r^3}\right) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kln}m_l\left[-3\frac{x_n x_j}{r^5} + \frac{\delta_{nj}}{r^3}\right]. \tag{31}$$

Most alkalmazzuk a két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó összefüggést, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kln} = \delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}$, amit visszaírva és egybeejtve a megfelelő indexet a következőt kapjuk:

$$(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})\, m_l \left[-3\frac{x_n x_j}{r^5} + \frac{\delta_{jn}}{r^3}\right] = -3m_i\frac{x_j x_j}{r^5} + 3m_j\frac{x_i x_j}{r^5} + 3m_i\frac{1}{r^3} - m_j\delta_{nj}\delta_{in}\frac{1}{r^3}, \tag{32}$$

ahol a harmadik tagban lévő 3-as szorzó egyszerűen csak a $\delta_{jn}\delta_{jn} = \delta_{jj} = 3$ dupla indexre való összegzésből jött. Az utolsó tag eredménye pedig $-m_j\delta_{ij}\frac{1}{r^3} = -\frac{m_i}{r^3}$. Ami így összességében a következőt adja:

$$\left(rot\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\right)_i = \frac{3x_i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r} - m_i r^2}{r^5} \to rot\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r} - \mathbf{m}\,r^2}{r^5}. \tag{33}$$

2. grad$\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$
   Megoldás:
   Írjuk ki definíció szerint a kérdéses gradiens, mint vektor i. komponensét:

$$\partial_i\left(\frac{\mathbf{pr}}{r^3}\right) = \partial_i\left(\frac{p_j x_j}{r^3}\right) = p_j\partial_i\left(\frac{x_j}{r^3}\right) = p_j\left[\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i x_j}{r^5}\right] = \frac{p_i}{r^3} - 3\frac{x_i p_j x_j}{r^5} = \frac{p_i}{r^3} - 3\frac{x_i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}. \tag{34}$$

   Azaz vektorosan kiírva gradiens értéke:

$$\mathrm{grad}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p}r^2 - 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}. \tag{35}$$

VII. SZÁMOLÁSOK DIRAC δ-FÜGGVÉNNYEL

Számolja ki az alábbi integrált!

1. $\int_V (r^4 + r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}) + c^4)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{c})d\mathbf{r}$, ahol V egy 6 egység sugarú gömb az origó körül, és $\mathbf{c} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$, amelynek hossza c.
   Megoldás:
   Definíció szerint $\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r} f(\mathbf{r})\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{c}) = f(\mathbf{c})$, ha $\mathbf{c} \in V$, egyébként pedig nulla. Alkalmazva ezt arra az esetre, ha V az origó középpontú $R = 6$ sugarú gömb és $\mathbf{c} = 5\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$, elegendő csak azt megvizsgálnunk, hogy mekkora a konstans $\mathbf{c}$ vektor hossza, $|\mathbf{c}| = \sqrt{38} > 6$, vagyis a pont nincs benne az integrálási tartományban, ami lenullázná a Dirac-delta argumentumát, vagyis az integrál értéke $\equiv 0$!