Példák: Multipólsorfejtés és kapacitás

I. GÖMB TÉRFOGATI TÖLTÉSELOSZLÁSSAL

Adott egy R sugarú gömb, amelynek középpontja az origó. A gömb térfogatán

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta \tag{1}$$

töltéseloszlás van, ahol k egy állandó, r és θ a szokásos gömbkoordináták. Vezesse le ennek a töltéseloszlásnak a potenciálját a z-tengelyen az origótól nagy távolságra!

(Segítség: Vegyük észre, hogy a töltéselrendezés hengerszimmetrikus, ami a dipól- és kvadrupólmomentumok számolását leegyszerűsíti.)

Megoldás:

Multipólus sorfejtés:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}^T \underline{\underline{Q}}\mathbf{r}}{r^5}\right) \tag{2}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}') \tag{3}$$

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}' \tag{4}$$

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\left(3r_i'r_j' - (r')^2\,\delta_{ij}\right)\rho(\mathbf{r}') \tag{5}$$

Azimutláis/hengerszimmetria esetén, Q_{ij} diagonális és $\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{Q}}\right) = 0 \rightarrow$

$$\underline{\underline{Q}} = D\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' 3(z')^2 - (r')^2\,\rho(\mathbf{r}') \tag{6}$$

a mostani töltéssűrűség éppen hengerszimmetriával rendelkező rendszernek felel meg, ahol a mono-, di- és kvadrupólus járulékok a következők lesznek:

$$Q = 2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta = 2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\int_0^R \mathrm{d}r\, kR(R-2r) = 0 \leftrightarrow \int_0^R \mathrm{d}r\,(R-2r) = 0 \tag{7}$$

$$p_i = 2\pi kR\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^R \mathrm{d}r\,(R-2r)\,x_i = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} \rightarrow D &= 2\pi kR\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin^2\theta\int_0^R \mathrm{d}r(R-2r)(3z^2-r^2) = 2\pi kR\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin^2\theta(3\cos^2\theta-1)\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2(R-2r) \\ &= -\frac{\pi kR^5}{3}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\left(\frac{3}{8}(1-\cos(4\theta)) + \frac{\cos(2\theta)-1}{2}\right) = \frac{\pi^2 kR^5}{24} \end{aligned} \tag{9}$$

ahol a dipólus azért tűnt el, mert kiírva gömbi koordinátákban az i. koordinátákat, az x, y komponensben egy-egy $\sim\cos\varphi$, $\sim\sin\varphi$, míg a z komponensben a $\sim\sin\theta\cos\theta$ tag integrálja fog nullát adni. Összességében tehát a következő potenciál adódik:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi^2 kR^5}{48}\right)\frac{z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}}{r^5} = \frac{\pi kR^5\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)}{192 r^3\varepsilon_0} \tag{10}$$

II. NÉGY RÉSZECSKE POTENCIÁLJA

Négy részecskét a következőképen helyezünk el: q töltést a $(0, -a)$ pontra, $3q$ töltést a $(0, a)$ pontra, $-2q$ töltést a $(a, 0)$ pontra, és $-2q$ töltést a $(-a, 0)$ pontra. Vezessen le egy egyszerű közelítő potenciált, ami az origótól nagy távolságra érvényes!

Megoldás:

A négy részecske együttes sűrűsége:

$$\rho(\mathbf{r}') = q(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}) - 2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) \tag{11}$$

Most az össztöltés csak a négy ponttöltés összege, $Q = 0$, míg a dipólusnál nem lesz y irányú komponens mivel a Dirac delták hasában csak x és z irányú eltolás van, ami azonnal lenullázza a p_y integráljában megjelenő y tagot. A másik két komponensben pedig csak a megfelelő komponensekhez tartozó Dirac-delták adnak járulékot:

$$p_x = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, xq(-2\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{x}}) - 2\delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{x}})) = \sum_k q^k x^k = (2a - 2a) = 0 \tag{12}$$

$$p_z = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, zq(3\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + \delta(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}})) = \sum_k q^k y^k = 3aq - aq = 2aq \tag{13}$$

ahol x^k és y^k a k. ponttöltés x és y koordinátája. A kvadrupolus tenzor esetében most nem élhetünk az azimutális szimmetria által nyújtott könnyítéssel, viszont alkalmazzuk a fentebb bevezetett ponttöltésekre érvényes diszkrét szummákat:

$$\begin{aligned} Q_{xy} = Q_{yx} &= \sum_k q_k 3 x_k y_k = 0 \\ Q_{yz} = Q_{zy} &= \sum_k q_k 3 y_k z_k = 0 \\ Q_{xz} = Q_{zx} &= \sum_k q_k 3 x_k z_k = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Az első két eset egyszerűen következik abból, hogy minden töltéshez mutató helyvektornak 0 az y komponense, míg a Q_{xz} komponensben mind a négy részecskénél sohasem egyszerre nem nulla az x és z komponens, azaz ha $x \neq 0$, akkor $z = 0$ és fordítva, azaz a szorzatuk mind a négy esetben zérus. Most hasonlóan megnézzük a diagonális elemeket, ahol elegendő kettőt kiszámolni a nevezetes $\mathrm{Tr}\underline{\underline{Q}} = 0$ azonosság alapján:

$$Q_{xx} = \sum_k q_k\left(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right) = q\left(2\left(-2a^2 - 2a^2\right) - a^2 - 3a^2\right) = -12qa^2, \tag{15}$$

$$Q_{yy} = \sum_k q_k\left(2y_k^2 - x_k^2 - z_k^2\right) = q\left(-\left(-2a^2 - 2a^2\right) - \left(3a^2 + a^2\right)\right) = 0, \tag{16}$$

$$Q_{zz} = -Q_{yy} - Q_{xx} = 12qa^2. \tag{17}$$

Vagyis a teljes potenciál a következő:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2aqz}{r^3} + \frac{6qa^2}{r^5}\left(z^2 - x^2\right)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2aq\cos\theta}{r^2} + \frac{6qa^2}{r^3}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\varphi\right)\right) \tag{18}$$

A végeredményből jól látható, hogy valóban nincsen azimutális szimmetria!

III. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL

Legyen $\rho_1(\mathbf{r})$ egy töltéseloszlás, amely $\Phi_1(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. Továbbá legyen $\rho_2(\mathbf{r})$ egy másik töltéseloszlás, amely $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. A két töltéseloszlás vagy nem egyidőben létezik, vagy térben egymástól nagyon messze vannak, azaz, a $\rho_1(\mathbf{r})$ töltéseloszlásnak nincs hatása a $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciálra sem vice versa.

Bizonyítsa be a Green-féle reciprocitási tételt, azaz

$$\int \rho_1(\mathbf{r})\Phi_2(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \rho_2(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{19}$$

Megoldás:
$\rho_1(\mathbf{r}) \to \Phi_1(\mathbf{r})$ és $\rho_2(\mathbf{r}) \to \Phi_2(\mathbf{r})$ függetlenek egymástól. Írjuk fel először a két elektromos tér szorzatának integrálját:

$$\int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \int d^3\mathbf{r}\, -\nabla\Phi_1\mathbf{E}_2 = -\oint d^2\mathbf{f}\,\Phi_1\mathbf{E}_2 + \int d^3\mathbf{r}\,\Phi_1\nabla\mathbf{E}_2 = -\oint d^2\mathbf{f}\,\Phi_1\mathbf{E}_2 + \int d^3\mathbf{r}\,\Phi_1\rho_2/\varepsilon_0 \tag{20}$$

$$\int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{E}_2(-\nabla\Phi_2) = -\oint d^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}_1\Phi_2 + \int d^3\mathbf{r}\,\Phi_1\nabla\mathbf{E}_2 = -\oint d^2\mathbf{f}\,\Phi_1\mathbf{E}_2 + \int d^3\mathbf{r}\,\Phi_1\rho_2/\varepsilon_0 \tag{21}$$

Most vegyünk egy $R \to \infty$ gömböt az integrálási tartománynak, aminek a határán el kell tűnnie a felületi integrálnak, hiszen ha a szuperpozíció elvét alkalmazva ponttöltésekből építjük fel a két rendszert, $\Phi \sim \frac{1}{r}$, $E \sim \frac{1}{r^2}$, ami összességében $\oint d^2\mathbf{f}\Phi_1\mathbf{E}_2 \sim \frac{1}{R} \to 0$ és ugyanígy igaz a másik esetre is, vagyis összességében az adódott a két egyenlet első és utolsó tagjainak egyenlősége alapján, hogy

$$\int d^3\mathbf{r}\,\Phi_1\rho_2 = \int d^3\mathbf{r}\,\Phi_2\rho_1 \tag{22}$$

IV. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL ALKALMAZÁSAI

1. Tegyük fel, hogy van két elkülönített vezető, a és b. Ha az a vezetőre Q töltést helyezünk, úgy, hogy a b semleges marad, akkor a b-nek potenciálja lesz, jelöljük V_{ab}-vel. Ha viszont b-re teszünk Q töltést, akkor az a-nak lesz potenciálja, ezt jelöljük V_{ba}-val. A Green reciprocitási tétel alkalmazásával mutassa meg, hogy $V_{ab} = V_{ba}$! (Ez az eredmény a vezetők alakjától független.)
Megoldás:
A két vezető tetszőleges geometriájú és ekkor a két töltéssűrűsés és az általuk keltett tér függetlenek egymástól, mivel úgy vizsgáljuk őket, hogy amíg az egyiken van töltés addig a másikon nincs. Legyenek a töltéssűrűségek, σ_a és σ_b, ekkor a Green-reciprocitási törvény miatt
$$\int d^3\mathbf{r}\,\sigma_a V_{ab} = \int d^3\mathbf{r}\,\sigma_b V_{ba} \to V_{ab}\int d^2f\,\sigma_a = V_{ba}\int d^2f\,\sigma_b \to V_{ab}Q = V_{ba}Q \tag{23}$$

2. Adott két földelt, koncentrikus fémgömb, sugaruk $a < b$. q töltést helyezünk a központtól r távolságra, úgy, hogy $a < r < b$. Mekkora a teljes indukált töltés a két gömbön?
Megoldás:
q töltés $a < r < b$ távolságra az origótól, az indukált töltéshez alkalmazzuk ismét a Green-féle reciprocitási törvényt, ahol legyen V_a a potenciál az a sugarú gömbön, míg V_b a potenciál a b sugarú gömbön, ha nincsenek földelve a gömbök és nincs töltés se ma rendszerben. Továbbá legyen a V_1 az eredeti, földelt, töltéses elrendezés, míg V_2 a két izolált töltés nélküli gömb összpotenciálja, illetve hasonló számozással a töltéssűrűségek ρ_1, ρ_2. Ekkor a földelés miatt V_1, amire alkalmazva a Green-féle reciprocitási törvényt:
$$\int d^3\mathbf{r}\,V_1\rho_2 = 0 = \int d^3\mathbf{r}\,V_2\rho_1 \tag{24}$$
Viszont a második tag felírható a következőképpen:
$$\int d^3\mathbf{r}\,V_2\rho_1 = V_a'Q_a + V_r'q + V_b'Q_b = 0 \tag{25}$$
Ahol Q_a, Q_b az eredeti elrendezésben indukálódott töltések a gömbökön, kielégítve, a földelés miatt, a $Q_a + Q_b = -q$ relációt. továbbá Ekkro triviálisan az izolált gömbök esetén a potenciálok a következőek lesznek paraméterezve V_a'-val:
$$V_r' = V_a'\frac{a}{r},\;\; V_b' = V_a'\frac{a}{b} \tag{26}$$
Kiírva minden összefüggést, a következő adódik:
$$-(Q_b + q) + q\frac{a}{r} + Q_b\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow q\frac{\left(\frac{a}{r} - 1\right)}{1 - \frac{a}{b}} \tag{27}$$
$$Q_a = -q - Q_b = q\frac{\left(\frac{a}{r} - \frac{a}{b}\right)}{1 - \frac{a}{b}} \tag{28}$$

V. POTENCIÁL- ÉS KAPACITÁSEGYÜTTHATÓK

A térben N darab fémtest helyezkedik el. Ezeken rendre Q_i töltés van és ennek megfelelően a potenciáljuk Φ_i $(i = 1, 2, 3, ..., N)$. A Maxwell egyenletek linearitása miatt írható, hogy

$$\Phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j \qquad (29)$$
$$Q_i = \sum_j c_{ij} \Phi_j,$$

ahol p_{ij}, c_{ij} a potenciál- és a kapacitásegyütthatók.

1. A rendszer összenergiájának felírásával mutassa meg, hogy a p_{ij} és a c_{ij} mátrixok szimmetrikusak!
   Megoldás:
   Az összenergia a potenciálok és a töltések segítségével:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i Q_j p_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i Q_j \frac{p_{ij}+p_{ji}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\Phi_i\Phi_j c_{ij} \qquad (30)$$

   és hasonlóan elvégezhető a szimmetrizálás a c_{ij} együtthatókra is.

2. Legyen $N = 3$. A c_{ij} adatok ismertek. Algebrai "bővítéssel" írja az egyenleteket

$$Q_i = \sum_{k=0}^{N} C_{ik}(\Phi_i - \Phi_k), i = 1, 2, 3, \qquad (31)$$

   alakba, ahol Φ_0 a Föld (végtelen távoli pont) potenciálja! A C_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ neve "főkapacitás", a C_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ "földkapacitás" vagy "szórt kapacitás". Együttes nevük "részkapacitás". Rajzoljon ún. áramköri modellt!
   Megoldás:
   Használjuk ki, hogy a földkapacitással együtt a kapacitások összege zérus, mivel ekkor a teljes rendszer össztöltése zérus, illetve definiálju kezdetben a következő módon a részkapacitásokat:

$$Q_i = -\sum_{k=0}^{N} C_{ik}\Phi_k \to +\Phi_i\sum_{k=0}^{N} C_{ik} \to Q_i = \sum_{k=0}^{N} C_{ik}(\Phi_i - \Phi_k) \qquad (32)$$

   Vagyis a részkapacitások a fémlapok közötti potenciálkülönbségek alapján adják meg az egyes töltéseket.

3. Írja fel a rendszer energiáját a C_{ik} részkapacitások segítségével!
   Megoldás:
   Egyszerűen csak használjuk a munkára vonatkozó összefüggést a töltések és a potenciálok segítségével:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\Phi_i = \sum_{k=0,i=1}^{N} \frac{1}{2}\Phi_i C_{ik}(\Phi_i - \Phi_k) \qquad (33)$$

VI. GÖMBÖK KAPACITÁS-MÁTRIXA

Adott két, R_1 és R_2 sugarú fémgömb. A középpontjaik távolsága legyen $a \gg R_1, R_2$. Mivel az a sokkal nagyobb a gömbök sugaránál, ezért jó közelítéssel a Q_1 töltés elektromos potenciálja az R_2 gömbfelületen mindenhol $Q_1/(4\pi\epsilon_0 a)$-nak vehető és ugyanez fordítva is igaz.
Megoldás:
Az 1-es gömb jó közelítéssel $\Phi_2 \approx \frac{kQ_1}{a} + \frac{kQ_2}{R_2}$ potenciált kelt, illetve fordítva is igaz, a 2-es gömb $\Phi_1 \approx \frac{kQ_2}{a} + \frac{kQ_1}{R_1}$, ahol a második tagok a saját potenciáljuk a felszínen

1. Írja fel a p_{ij} mátrixot erre az esetre!
   Ezzel már könnyen kifejezhető a potenciálmátrix:

$$p_{ij} = k \begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/a \\ 1/a & 1/R_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

2. A p_{ij} mátrix ismeretében határozza meg a c_{ij} kapacitás együtthatók mátrixát!
   Megoldás:
   Innen könnyen meghatározható a kapcitás mátrix egy egyszerű invertálás segítségével:

$$c_i j = [p_{ij}]^{-1} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1R_2 - 1/a^2} \begin{bmatrix} 1/R_2 & -1/a \\ -1/a & 1/R_1 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{a^2 - R_1R_2} \begin{bmatrix} R_1a^2 & -R_1^2R_2 \\ -R_1R_2^2 & R_2a^2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

3. Határozza meg a C_{12} főkapacitást és a C_{10}, C_{20} szórt (föld-) kapacitásokat!
   Megoldás:
   A földpotenciál legyen a végtelenben $\Phi_0 = 0$, ekkor felírva kapacitás együtthatókkal a potenciálokat:

$$Q_1 = -C_{10}\Phi_0 - C_{12}\Phi_2 + C_{10}\Phi_1 + C_{12}\Phi_1 \tag{36}$$
$$Q_2 = -C_{20}\Phi_0 - C_{21}\Phi_1 + C_{20}\Phi_2 + C_{21}\Phi_2 \tag{37}$$
$$\Rightarrow (C_{10} + C_{12})\,\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 \Rightarrow c_{12} = c_{21} = -C_{12} \qquad \Rightarrow (C_{20} + C_{21})\,\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 \Rightarrow c_{11} = C_{10} + C_{12} \tag{38}$$
$$\Rightarrow c_{22} = C_{20} + C_{21} \tag{39}$$
$$\Rightarrow C_{12} = C_{21} = -c_{12} \tag{40}$$
$$\Rightarrow C_{20} = c_{22} + c_{12} \tag{41}$$
$$\Rightarrow C_{10} = c_{11} + c_{12} \tag{42}$$

VII. ÁTLAG ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG GÖMBÖN BELÜL

Mutassa meg, hogy egy R sugarú gömbön belül, a gömbön belül található töltésekből eredő átlagos elektromos térerősség:

$$\mathbf{E}_{\text{átlag}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{R^3}, \tag{43}$$

ahol $\mathbf{p}$ a teljes dipólmomentum. Ezt az eredményt például a következő lépéseket követve lehet bebizonyítani:

1. Mutassa meg, hogy az átlag elektromos tér a gömbön belül, amelyet egy az $\mathbf{r}$-pontban lévő q töltés hoz létre, az ugyanaz, mint amit egy $\rho = -q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ töltéseloszlás hoz létre az $\mathbf{r}$ pontban.
   Megoldás:
   Az átlagos tér, ha ponttöltés az $\mathbf{r}$ helyes tartózkodik, a következő kompakt alakban fejezhető ki egy pontban a gömbön belül, a szokásos módon:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -kq\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{44}$$

   ami ha kiátlagolunk egy origó középpontú gömbre:

$$E_{\text{atlag}}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi R^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' - kq\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{45}$$

   ami definíció szerint a $\rho(\mathbf{r}) = \frac{-q}{4/3\pi R^3}$ töltéssűrűség által keltett potenciál.

2. A fenti ρ töltéseloszlás terét ki lehet számolni a Gauss tétel segítségével is. Ebben az eredményben szerepel a q töltés dipólmomentuma is; írja át a (43) alakba!
   Megoldás:
   Alkalmazzuk a Gauss-tételt egy $r < R$ sugarú gömbre:

$$E = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{-qr^3}{R^3} = -\frac{r\rho}{3\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{kq}{R^3}\mathbf{r} = -\frac{k}{R^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r} = -\frac{k}{R^3}\mathbf{p} \tag{46}$$

3. A szuperpozícióelv segítségével általános töltéselrendezésre is megkapjuk a kívánt eredményt.
   Megoldás:
   Igen.

VIII. A DIPÓLUS SZINGULARITÁSA

Tudjuk, hogy egy "tiszta" dipólus elektromos tere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\right]. \tag{47}$$

1. Számolja ki egy z irányba mutató, az origóban lévő dipólus átlag elektromos terét egy R sugarú gömbön belül és vesse össze a (43) egyenlettel!
   Megoldás:
   Ha $\mathbf{p} = p_z\hat{\mathbf{z}} \to \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3}(3p_z\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - p_z\hat{\mathbf{z}})$, innen az átlagos érték:

$$\mathbf{E}_{\text{atlag}} = \frac{3}{4\pi R^3}k\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\frac{3p_z\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - p_z\hat{\mathbf{z}}}{r^3} = \frac{3}{16\pi^2R^3\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^R \mathrm{d}r\,\frac{3p_z\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - p_z\hat{\mathbf{z}}}{r} = \mathbf{0} \tag{48}$$

   mivel az x és y komponensekben $\sim\ \cos\varphi, \sim\ \sin\varphi$ függések nullát adnak a szögintegrálások után, míg a z kompoenens integráljában összességében egy $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\cos\theta = 0$. Viszont a radiális rész ezzel szemben divergens járulékot ad, mivel $\sim \int_0^R \mathrm{d}r\,\frac{1}{r} \to \infty$.

   A különbség abból adódik, hogy a dipólus elektromos tere az origóban divergál. A szögintegrál nulla, viszont a radiális integrál végtelen, így nem egyértelmű az eredmény. A paradoxon megoldása, hogy a (47) egyenlet alapján kapott eredményt csak egy dipólus körüli ϵ sugarú gömbön kívül tekintjük érvényesnek, ez a kontribució egyértelműen nulla, viszont a teljes eredmény ((43) egyenlet) a gömbön belüli jarulékból ered.

2. Milyennek kell lennie a gömbön belüli térnek, hogy kijöjjön az előző példában talált eredmény? (Válasz: egy $-(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$ plusz járulékot kell tartalmazni.)
   Megoldás:
   Az $\epsilon \to 0$-n belüli teret válasszuk meg $\tilde{\mathbf{E}} = -(\mathbf{p}/3\varepsilon_0)\,\delta(\mathbf{r})$-nek, ami az átlagolás után a következő adja:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{atlag}} = \frac{3}{4\pi R^3}\int_{r<\epsilon}\mathrm{d}^3\mathbf{r}(-\mathbf{p}/\varepsilon_0)\,\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{R^3} \tag{49}$$