1. NZH extra példák

Érdemes a szigetelőkre érvényes határfeltételt átfogalmazni egy polarizációs felületi töltéssűrűségre. Ezt kétféleképpen lehet:

1. Adott két, végtelen hosszú koncentrikus hengerfelület. A hengerek forgástengelye a z koordinátatengely és a sugaruk $R_2 > R_1$. A belső hengerfelületen belül egyenletes ρ_1 pozitív térfogati töltéssűrűség van. A külső hengerfelületen egyenletes $-\sigma_2$ negatív felületi töltéssűrűség helyezkedik el. A töltéselrendezés hosszegységre eső össztöltése zérus.

   (a) Határozza meg a ρ_1 térfogati töltéssűrűség által keltett $E_1(r)$ térerősséget és a $\Phi_1(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a kapott függvényeket!

   (b) Határozza meg a $-\sigma_2$ felületi töltéssűrűség által keltett $E_2(r)$ térerősséget és a $\Phi_2(r)$ elektromos potenciált mindenhol a térben! Rajzolja fel a kapott függvényeket!

   (c) Rajzolja fel a teljes térerősséget és a teljes potenciált!

   (d) A kapott eredmények alapján határozza meg a töltésrendszer hosszegységre eső W összenergiáját!

   Megoldás:

   (a) Alkalmazzuk a Gauss-tételt henger koordináta rendszer esetén, azaz ekkor a rendszer szimmetriája miatt $\mathbf{E} = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a henger koordinátarendszerbeli radiális egységvektor. Ekkor a felületi integrál egy $r < R_1$ hengerfelületre egy tetszőleges L hosszú szakaszra

   $$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi L r E(r) = Q_r = \frac{L\pi r^2\rho_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r < R_1) = \frac{r\rho_1}{2\varepsilon_0} \tag{1}$$

   Ha $r > R_1$ a szokásos módon a belső henger teljes töltésével kell számolnunk:

   $$2\pi L r E(r) = Q_{R_1} = \frac{L\pi R_1^2\rho_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(R_1 < r < R_2) = \frac{R_1^2\rho_1}{2r\varepsilon_0} \tag{2}$$

   Ha $r > R_2$, akkor a külső henger felületi töltéssűrűségét is bele kell vennünk az össztöltésbe, ami azonban éppen nullát ad a feladat leírása alapján:

   $$E(r > R_2) = 0 \tag{3}$$

   A potenciál ekkor legkönnyebben a következő módon fejezhető ki, biztosítva, hogy az egyes felületeken folytonos legyen:

   $$\Phi(r \le R_1) = -\frac{r^2\rho_1}{4\varepsilon_0} + \Phi_0 \tag{4}$$

   $$\Phi(R_1 < r \le R_2) = -\frac{R_1^2\rho_1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{5}$$

   $$\Phi(r > R_2) = 0 \tag{6}$$

   Ahol $r_0 = R_2$ bizotsítva, hogy a potenciál folytonosan tűnjn el $r = R_2$-nél. Ekkor a Φ_0-t az $r = R_1$-ben való folytonosság rögzíti:

   $$\Phi_0 = -\frac{R_1^2\rho_1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1^2\rho_1}{4\varepsilon_0} = \frac{R_1^2\rho_1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{eR_2}{R_1}\right) \Rightarrow \Phi_1(r) = -\frac{r^2\rho_1}{4\varepsilon_0} + \frac{R_1^2\rho_1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{eR_2}{R_1}\right) \tag{7}$$

   (b) Hosszegységre eső energia először a tölsésűrűség segítségével, ekkor egyszer integrálnunk kell az $r < R_1$ tartományra $L = 1$ esetén, illetve az $r = R_2$, $L = 1$ hosszúságú hengerfelületre, ami utóbbin azonban nulla lesz a járulék, hiszen a potenciál a folytonosság miatt eltűnik az $r = R_2$ felületen:

   $$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1^2\pi}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_1}\mathrm{d}r\;-r^3 + rR_1^2\ln\left(\frac{eR_2}{R_1}\right)\right) = \frac{\rho_1^2\pi}{4\varepsilon_0}R_1^4\ln\left(\frac{\sqrt{e}R_2}{R_1}\right)/2 \tag{8}$$

Most kiszámoljuk a térerősség segítségével is, ahol két térfogati integrált kell elvégeznünk, az $r \leq R_1$ és az $R_1 < r \leq R_2$ tartományokra:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(2\pi\int_0^{R_1} \mathrm{d}r\, r\frac{r^2\rho_1^2}{4\varepsilon_0^2} + 2\pi\int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}r\, r\frac{R_1^4\rho_1^2}{4r^2\varepsilon_0^2}\right) = \frac{\pi R_1^4\rho_1^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\pi R_1^4\rho_1^2}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{\rho_1^2\pi}{4\varepsilon_0}R_1^4\ln\left(\frac{\sqrt{e}R_2}{R_1}\right)/2 \tag{9}$$

2. Adott egy R sugarú gömb melynek a felületén σ homogén sűrűségű töltés helyezkedik el. Számítsa ki az elektromos teret a gömb középpontjától z távolságban a

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{10}$$

definíció segítségével, azaz a gömb felület egy infiniteszimális eleme járulékának felírásával, és ezen kifejezés kiintegrálásával. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.
Megoldás:
Legyen egy az R sugarú gömbön θ, φ szögnél egy $R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ infinitezimális darab töltése $\mathrm{d}q = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\sigma$. Ennek a pontnak a távolsága a z tengely egy adot pontjától, $|z\hat{\mathbf{z}} - R\hat{\mathbf{r}}| = \sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}$, ahonnan a infinitezimális darab által keltett térerősség *nagysága:*

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2+z^2-2Rz\cos\theta} \Rightarrow \mathrm{d}E = \frac{R^2\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{R^2+z^2-2Rz\cos\theta} \tag{11}$$

Ahol előre kiintegrálhattuk a $\mathrm{d}\varphi$ szerinti integrált, mivel a rendszer azimut szimmetriával rendelkezik így $E_x = E_y = 0$, illetve ekkor az infinitezimális z komponens:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_z &= \mathrm{d}E\sqrt{1-\left(\frac{R\sin\theta}{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}\right)^2} = \mathrm{d}E\frac{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta-\sin^2\theta R^2}}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}}\\ &= \frac{R^2\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta-\sin^2\theta R^2}}{\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{12}$$

Innen felintegrálva a szokásos $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x$ áttéréssel:

$$\begin{aligned}E_z &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\frac{R^2\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sqrt{z^2-2Rzx+x^2R^2}}{\left(R^2+z^2-2Rzx\right)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\frac{R^2\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z-xR}{\left(R^2+z^2-2Rzx\right)^{3/2}}\\ &= \frac{R^2\sigma}{2R\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzx}} - \frac{R^2\sigma}{4Rz^2\varepsilon_0}\frac{2\left(R^2+z^2\right)-2Rzx}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzx}}\Bigg|_{-1}^1 = \frac{R^4\sigma}{2z^2\varepsilon_0}\frac{zx-R}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzx}}\Bigg|_{-1}^1\\ &= \frac{R^2\sigma}{2z^2\varepsilon_0}\left(\frac{z-R}{|z-R|}+1\right) = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 z^2},\ \text{ha } z > R,\ \text{egyébként } 0\end{aligned} \tag{13}$$

3. A fenti eredmény alapján számítsa ki egy R sugarú gömb elektromos terét, melynek teljes térfogatában ρ homogén töltéssűrűség helyezkedik el. Elemezze külön a $z > R$ és a $z < R$ eseteket.
Megoldás:
Tehát ekkor a z pontban ismert az adott r sugarú gömbhéj által keltett infinitezimális tér $\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q_r}{\varepsilon_0 z^2} = \frac{4\pi r^2\mathrm{d}r\rho}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$, amit csak fel kell integrálnunk 0-tól R-ig:

$$E_z(z > R) = \int_0^R \mathrm{d}r\frac{r^2\rho}{\varepsilon_0 z^2} = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 z^2} \tag{14}$$

illetve, a gömbön belül ekkor csak egy $z \equiv r < R$-ig kell integrálnunk:

$$E_z(z < R) = \int_0^z \mathrm{d}r'\frac{\left(r'\right)^2\rho}{\varepsilon_0 z^2} = \frac{z\rho}{3\varepsilon_0} \tag{15}$$

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a megoldása jóval egyszerűbb, ha a Gauss tételt alkalmazzuk.

4. Adott egy R sugarú földelt fémgömb, amitől $a > R$ távolságra található egy λ homogén töltéseloszlásútöltött végtelen hosszú pálca. Határozza meg a pálcatükrötöltését a gömbön belül!
Megoldás:
Vegyünk egy a gömb középpontjától z magasságban lévő $\mathrm{d}z$ hosszúságú infinitezimális szakaszt, melynek töltése $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}z$, illetve távolsága a gömb középpontjától $d(\varphi) = \sqrt{a^2+z^2} = z/\cos\varphi$, ahol bevezettük a gömb középpontját a ponttal összekötő szakasz és az x tengely által bezárt φ szöggel való paraméterezést.
Ekkor a szakasz távolsága gömb középpontjától $d'(\varphi) = \frac{R^2}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{R^2}{a}\cos\varphi$, $\mathrm{d}q' = -\frac{R}{\sqrt{z^2+a^2}}\mathrm{d}q = -\frac{R}{a}\cos\varphi \mathrm{d}q$.
Vagyis a tükörtöltés elhelyezkedését az origótól egy $d' = \frac{R^2}{a}\cos\varphi$ paraméteres görbe írja le, ami azonban egy olyan görbe, amelynek a pontjai ugyanolyan távolságra vannak az $\frac{R^2}{2a}$ ponttól. Ezt könnyen láthatjuk a koszinusz tétel alapján, ahol a gömb középpontjától $\frac{R^2}{2a}$ mért távolsága a tükörtöltéseknek:

$$\sqrt{\frac{R^4}{4a^2} + \cos^2\varphi \frac{R^4}{a^2} - 2\cos\varphi\cos\varphi\frac{R^2}{a}\frac{R^2}{2a}} \equiv \frac{R^2}{2a} \tag{16}$$

Most megadjuk a tükörtöltés elrendezés tölsésűrűségét, $\lambda'(\varphi)$ felhasnzálva, hogy

$$\mathrm{d}q' = \mathrm{d}\varphi\frac{R^2}{2a}\lambda'(\varphi) = -\frac{R}{a}\cos\varphi\mathrm{d}q = -\frac{R}{a}\cos\varphi\lambda\mathrm{d}z \Rightarrow \lambda'(\varphi) = -\frac{2\lambda}{R}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \tag{17}$$

Tehát csak meg kell adnunk a $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$ deriváltat, $\tan\varphi = \frac{z}{a} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{d}z}{a} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{a}{\cos^2\varphi}$, ami végsősoron a következő töltéssűrűséget adja:

$$\lambda'(\varphi) = -\frac{2a}{R}\frac{\lambda}{\cos\varphi} \tag{18}$$

5. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál, a másik $y = a$-nál, helyezkedik el. További két végtelen hosszú fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $x = -b$-nél, a másik $x = b$-nél, helyezkedik el. Ezen fémlapok potenciálja V_0. Számolja ki a potenciált a négy fémlap által közrezárt térfogatban. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)
Megoldás:
A megfelelő Laplace egyenlet a változószeparűcióval együtt:

$$\Delta\Phi(x,y) = \Delta(X(x)Y(y)) = \partial_x^2(X(x))\,Y(y) = X(x)\partial_y^2(Y(y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial_x^2 X(x)}{X(x)} + \frac{\partial_y^2 Y(y)}{Y(y)} = 0 \tag{19}$$

A határfeltételek a két elrendezésben:

$$Y_1(y=0,a) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right),\ X_1(-b) = 0 \Rightarrow X_1 \sim \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(x+b)\right) \tag{20}$$

$$Y_2(y=0,a) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right),\ X_2(b) = 0 \Rightarrow X_2 \sim \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(x-b)\right) \tag{21}$$

Ahonnan a kétáltalános megoldás:

$$\Phi_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(x+b)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{22}$$

$$\Phi_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(x-b)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{23}$$

A további kát határfeltételt, $X_1(x=b) = V_0(y)$, illetve $X_2(-b) = V_0(y)$ az együtthatók meghatározásánál használjuk fel:

$$\Phi_1(x=b,y) = V_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n}\sinh\left(\frac{2nb\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \Rightarrow A_{1,n} = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{2nb\pi}{a}\right)}\int_0^a \mathrm{d}y\, V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \equiv A_n \tag{24}$$

$$\Phi_2(x=-b,y) = V_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n}\sinh\left(\frac{-2nb\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \Rightarrow A_{2,n} = -\frac{2}{a\sinh\left(\frac{2nb\pi}{a}\right)}\int_0^a \mathrm{d}y\, V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \equiv -A_n \tag{25}$$

Innen a teljes potenciál:

$$\Phi(x,y) = \Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}(x+b)\Big) - \sinh\Big(\frac{n\pi}{a}(x-b)\Big)\right] \sin\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) \tag{26}$$

6. Adott egy vékony szigetelő pálca, a $z = -a$-tól $z = a$-ig, amelyen a következő töltéseloszlások vannak (a) $\lambda = k\cos(\pi z/2a)$, (b) $\lambda = k\sin(\pi z/a)$, (c) $\lambda = k\cos(\pi z/a)$, ahol k egy állandó. Mindhárom esetben számolja ki a potenciál multipólus kifejtésének vezető rendű (nem eltűnő) tagját!
Megoldás:
Mindahárom esetben a számolást egy dimenzióban kell elvégeznünk, mivel a töltéseloszlás ide szorítja meg a teljes 3 dimenziós teret:

(a) Monopólusok:

$$Q_1 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, k\cos(\pi z/2a) = 4ak/\pi \tag{27}$$

$$Q_2 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, k\sin(\pi z/a) = 0 \tag{28}$$

$$Q_3 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, k\cos(\pi z/a) = 0 \tag{29}$$

(b) Dipólusok:
Mivel a $x, y = 0$ értékekre korlátozzuk figyelmünket

$$p_1 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, k\cos(\pi z/2a) = 0,\ \text{mivel egy páratlan függvényt integráltunk} \tag{30}$$

$$p_2 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, kz\sin(\pi z/a) = 2a^2k/\pi \tag{31}$$

$$p_3 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, kz\cos(\pi z/a) = 0,\ \text{mivel egy páratlan függvényt integráltunk} \tag{32}$$

vagyis a dipólus járulék:

$$\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{p_i\cos\theta}{r^2} \tag{33}$$

(c) Kvadropólusok:
ismét minden számításban $x, y = 0$, illetve triviális módon azimutális szimmetriával van dolgunk, vagyis elegendő kiszámolni csak a Q_{zz} tagot:

$$Q_{zz,1} = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, 2z^2k\cos(\pi z/2a) = 8a^3k\frac{\pi^2-8}{\pi^3} \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x\, x^2\cos x = \frac{\pi^2-8}{2} \tag{34}$$

$$Q_{zz,2} = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, 2z^2k\sin(\pi z/a) = 0,\ \text{mivel egy páratlan függvényt integráltunk} \tag{35}$$

$$Q_{zz,3} = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, 2z^2k\cos(\pi z/a) = -8a^3k/\pi^2 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, x^2\cos x = -4\pi \tag{36}$$

míg a másik kettő diagonális elem rendre $Q_{xx,i} = Q_{yy,i} = -Q_{zz,i}/2$

Tehát a potenciálok közelítő alakjai a következőek:

$$\Phi_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4ak}{\pi r} + \frac{4a^3(\pi^2-8)\Big(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\Big)}{\pi^3 r^3}\right) \tag{37}$$

$$\Phi_2 \approx \frac{a^2\pi\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{38}$$

$$\Phi_3 \approx -\frac{a^3k\Big(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\Big)}{\pi^3\varepsilon_0 r^3} \tag{39}$$