

Elektrodinamika

Előadás jegyzet a BMETE15AF25 Elektrodinamika 1. tárgyhoz

Jakovác Antal, Takács Gábor, Nagy Dániel Bálint

2020. június 21.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Rövid történeti áttekintés	4
1.1.1. Elektrosztatika	4
1.1.2. Áram és mágnesség	5
1.1.3. Elektromágnesség	6
2. Elektrosztatika	7
2.1. Elektrosztatika alaptörvényei	7
2.1.1. Coulomb törvény, szuperpozíció	7
2.1.2. Elektromos mező, Maxwell 1. egyenlete	8
2.1.3. Potenciál-függvény, Maxwell 2. egyenlete	10
2.1.4. Poisson-egyenlet	11
2.1.5. Töltésrendszer energiája	11
2.1.6. Erővonalkép	13
2.2. Potenciálemélet	14
2.2.1. Speciális töltéeloszlások tere	14
2.2.2. Poisson-egyenlet határfeltételekkel	15
2.2.3. Green-függvény módszer, Green tétele	16
2.2.4. Kapacitás	17
2.2.5. Tükörtöltések módszere	18
2.3. Multipólus	20
2.3.1. Multipólus kifejtés	20
2.3.2. Töltéeloszlás energiája külső térben	21
2.3.3. Két dipólus kölcsönhatási energiája	21
2.4. Elektrosztatika anyag jelenlétében	22
2.4.1. Polarizáció, Maxwell-egyenletek	22
2.4.2. Határfeltételek	24
2.4.3. Dielektromos gömb külső térben	25
2.4.4. Elektrosztatikus energia dielektrikumban	26
2.4.5. Változó dielektrikum	27
2.4.6. Clausius-Mossotti-egyenlet	28
3. Magnetosztatika	30
3.1. Magnetosztatika alapjai	30
3.1.1. Elektromos áram	30
3.1.2. Biot-Savart törvény	30
3.1.3. Vektorpotenciál, Maxwell 3. és 4. egyenlete	32

3.1.4.	Mértékinvariancia	32
3.2.	Multipólus kifejtés a magnetosztatikában	33
3.2.1.	Lokalizált árameloszlás mágneses tere	33
3.2.2.	Multipólus kifejtés, mágneses dipólus, giromágneses faktor	34
3.2.3.	Erő és forgatónyomaték	35
3.3.	Magnetosztatika anyagban	36
3.3.1.	Mágnesezettség	36
3.3.2.	Maxwell-egyenletek	37
3.3.3.	Lineáris és nemlineáris anyagok	38
3.3.4.	Határfeltételek	39
3.4.	Mágneses skalárpotenciál	40
3.4.1.	Megoldási módszerek, a skalárpotenciál	40
3.4.2.	Speciális elrendezések mágneses terei	40
4.	Kvázistacionárius terek	43
4.1.	Faraday törvénye, Galilei invariancia	43
4.2.	Mágneses mező energiája	44
4.3.	Indukciós együtthatók	45
4.4.	Kvázistacionárius jelenségek vezetőkben, dimenzióanalízis, kisimulás	46
4.5.	Skin-effektus	47
5.	Elektrodinamika	49
5.1.	Maxwell-egyenletek	49
5.1.1.	Előzmények	49
5.1.2.	Eltolási áram	52
5.1.3.	Potenciálok, mértékszabadság	52
5.1.4.	Elektromágneses mező energiája	54
5.1.5.	Elektromágneses mező impulzusa	56
5.2.	Elektromágneses hullámok vákuumban	56
5.2.1.	Elektromágneses hullámok	56
5.2.2.	Csoport- és fázissebesség	57
5.2.3.	Síkhullámok	59
	Függelék: Elektromágneses hullámok közeg határán	60
5.3.	Megoldás forrás jelenlétében	62
5.3.1.	Hullám-egyenlet Green-függvénye	62
5.3.2.	Fizikai értelmezés	63
5.4.	Töltésrendszerek sugárzása	64
5.4.1.	Lokalizált, oszcilláló töltések tere	64
5.4.2.	Elektromos dipólussugárzás	65
5.4.3.	Larmor-formula	67
5.5.	Szórás	68
5.5.1.	Hatáskeresztmetszet	68
5.5.2.	Dipólszórás	69
5.5.3.	Szórás több szórócentrumon. Az alakfaktor	71
5.5.4.	Szórás gázon, sűrűségingadozásokon és szabályos kristályon	72
5.6.	Relativisztikus formalizmus	75
5.6.1.	Előzmények	75
5.6.2.	Négyes vektorok	75

5.6.3. Lorentz-transzformációk	78
5.6.4. Szabad relativisztikus részecske	80
5.6.5. Relativisztikus Larmor-formula	82

A. Matematika	86
A.1. Mezők deriváltja	86
A.2. Mezők integrálja	87
A.3. Lineáris algebra	88

1. fejezet

Bevezetés

Ebben a fejezetben az elektrodinamika kialakulásának fő fejezeteit tekintjük át, elsősorban Simonyi Károly könyvére támaszkodva [3]. A további részletekhez az olvasót ezen könyv olvasására buzdítjuk.

1.1. Rövid történeti áttekintés

Bár sok tudományos diszciplína kezdődik úgy, hogy „már az ókori görögök is...”, az elektrodinamikára ez nem igazán igaz. Az ókorban ismertek bizonyos elektromos és mágneses alapjelenségeket, azonban ezek elszigetelt ismeretek maradtak. Ami ebből fennmaradt, az elsősorban a mai nevekben ölt testet. Az elektron a borostyán görög megfelelőjéből származik, és arra utal, hogy a borostyán dörzsöléses elektromosságát a görögök is ismerték. A mágnességről a természetben fellelhető „magnetic litosz”, azaz mágneskő révén volt tudomásuk.

1.1.1. Elektrosztatika

Az elektrodinamika igazi kvalitatív megismerése csak a középkorban kezdődött el. Egyik első képviselője volt *P. Peregrinus*, aki 1269-ben kísérleteket végzett a mágnesek tulajdonságainak felderítésére, például ő volt az, aki a mágnes erővonalait feltérképezte. Tevékenykedése ugyanakkor nem volt nagy hatása kortársaira, és az elektromágneses jelenségek kutatása lényegében három évszázadig újból szünetelt.

A következő lépést *W. Gilbert* tette, aki 1600 táján a Föld mágnessége iránt tanúsított érdeklődést, és iránytűt szerkesztett. Ő mutatta meg a természetes mágnesek tanulmányozásával, hogy nincs mágneses monopólus, a pozitív és negatív pólusok nem választhatók szét, egy félbevágott mágnesben ugyanúgy megjelennek. Megmutatta azt is, hogy a dörzsöléses elektromosság nem csupán a borostyánban alakul ki, hanem például üvegben és viaszban is.

A tudomány történetében számtalanszor fordult elő, hogy egy ügyesen megszerkesztett találmány nagy lendületet ad a fejlődésnek. Az elektrodinamikában az *O. Guericke* által 1672-ben szerkesztett dörzselektromos gép ilyen úttörő jelentőségű volt. Ezzel a szerkezettel könnyen lehetett a dörzsöléses elektromossággal feltölthető anyagokat elektromos töltéssel ellátni. Emiatt a XVIII. század első felében az elektromos jelenségek bekerülnek az úri szalonokba, kedvelt társasági szórakozás lesz a különböző jelenségek bemutatása. S bár az elektromos kisülések, a töltések vonzása és taszítása látványosságnak sem utolsó, a tudományos megismerés is haladt előre. *S. Grey* 1729 körül felismerte, hogy bizonyos anyagokkal a töltés nagy távolságokra szállítható, más anyagok szigetelőként működnek. Például a szobában feltöltött borostyán töltését a kertben is lehetett ilyen módon hasznosítani. *C. Dufay* 1733-ban felismerte, hogy az üveg és a gyanta „elektromossága” különböző.

A továbblépést ismét egy eszköz, a *von Kleist* és *Musschenbroek* által közel egy időben megalkotott,

de az utóbbi működési helyéről leideni palacknak elnevezett eszköz jelentette. A 1.1 ábrán látható szerkezet a töltések összegyűjtésére volt alkalmas, a mai kondenzátor őse. A dörzselektromos szerkezet által



1.1. ábra. Leideni palack, forrás „http://en.wikipedia.org/wiki/Leyden_jar”.

szolgáltató töltést a palack belsejében levő elektrolitba vezetik, a töltés semlegesítéséről a palack külsején levő fémborításnak a palackot fogó emberen keresztüli földelése gondoskodott. A szerkezet a XX. században mint van der Graaf generátor született újjá, a modern változat valóban nagy, akár 25 millió voltos feszültségre is feltölthető. Ugyan a XVIII. századi változat nem volt ennyire hatékony, de a források tanúsága szerint [3] akár 180 gárdista „megugrasztására” is alkalmas volt.

A fizika egyik első amerikai képviselője volt *B. Franklin*. Legismertebb munkái a légköri elektromossággal kapcsolatosak, például felismerte 1750 körül, hogy légköri elektromossággal feltölthető a leideni palack. Az ő nevéhez fűződik a csúcshatás felismerése és a villámhárító feltalálása. Bevezette az elektromos töltés fogalmát: a két egyenértékű lehetőség közül ő úgy gondolta, hogy az üvegben halmozódik fel töltéstöbblet (nem a borostyánban), ezt később Euler nevezte el pozitív töltésnek. Franklin felismerte a töltésmegmaradás törvényét is.

Az 1700-as évek végére elegendő fizikai és matematikai ismeret halmozódott fel ahhoz, hogy a kvantitatív törvényeket is fel lehetett állítani. Az elektromos ponttöltés $1/r^2$ -es távolságfüggését több tudós nagyjában egy időben is felismerte. *J. Priestley* 1767-ben abból a tényből, hogy a töltések a tapasztalat szerint a felületen gyűlnek össze, és üreg belsejében nincs erőhatás elméleti úton vezette le ezt a törvényt. Tőle függetlenül *Cavendish* ugyanezzel a gondolatmenettel találta ki az erőtvényt, sőt ki is mérte torziós mérleggel. Munkáit azonban nem publikálta, tevékenységéről *Kelvin* révén van tudomásunk, aki 1879-ben publikálta Cavendish elfelejtett munkáit. Ezen felül Cavendish foglalkozott különböző tárgyak kapacitásának mérésével, vizsgált dielektrikumokat, tanulmányozta a vezetőképeséget. *C. Coulomb*, akinek a nevéhez kötjük az erőtvényt, hadmérnök volt, igen pontos torziós ingákat készített. Ő mérte ki 1784-ben az $1/r^2$ -es Coulomb törvényt. Az erőtvény ismeretében *Poisson* 1811-ben képes volt arra, hogy egy tetszőleges töltéseloszlás által létrehozott erőter matematikai egyenleteit megalkossa.

1.1.2. Áram és mágnesség

Míg a fenti vizsgálatok a sztatikus elektromosság tulajdonságainak felderítésére irányultak, az árammal és a mágnességgel kapcsolatos jelenségekhez hiányzott egy olyan eszköz, amely állandó feszültségforrásként üzemelt. Ez irányban az első lépés *L. Galvani* nevéhez fűződik (Wikipedia), aki maga az anatómia és a biológia professzora volt Bolognában. Észrevette békák preparálása közben, hogy ha vasrácra rézkampón rögzítette a békapreparátumokat, akkor azok a vasrácshoz hozzáérve összerándulnak. Ezt ő az állati elektromosság jelének hitte, és megfigyeléseit 1791-ben ilyen módon tette közzé. Később *A. Volta* mutatott rá, hogy itt valójában nem a béka, hanem az eltérő fémek okozzák az effektust. Erre alapozva egymástól nedves kartonlapokkal elkülönített cink és rézlapokból állandó feszültségforrást épített 1800-ban (Volta-oszlop), amelyet Galvani iránti tiszteletből galván-elemnek nevezett el.

Hiába volt azonban meg az áramforrás, az a gondolat, hogy az áram mágneses teret kelt maga körül, annyira különös volt, hogy nagyjából 20 évet kellett várni, míg *C. Oersted* véletlenül észrevette ezt. Ezt

követően azonban igen gyorsan megszületett a kvantitatív magnetosztatika: *J.-B. Biot* és *F. Savart* már 1820-ban kimérték az áramjárta vezető körül kialakuló mágneses teret a mágnesű elfordulásával, és leírására egyenletrendszerrel dolgoztak ki az elektrosztatika mintájára. *A.M. Ampère* felírta a mágneses térre vonatkozó integrális törvényét, és megmutatta, hogy áramkör mágneses hatása egy lapos mágnessel egyenértékű.

Érdekes, hogy míg az áram hőhatása már igen korán nyilvánvaló volt, az ellenállás fogalma milyen lassan alakult ki. Csupán 1826-ban írta fel *G.S. Ohm* a róla elnevezett törvényt. Az áramkörök viselkedésének törvényeire pedig csak 1845-ben *G. Kirchhoff* munkássága alapján derült fény.

1.1.3. Elektromágnesség

A fentiek alapján láthattuk, hogy az 1820-as évek közepétől ismertek voltak az elektrosztatika és magnetosztatika törvényei. A két látszólag önálló diszciplína összekapcsolása *M. Faraday* nevéhez fűződik, aki 1831-ben észrevette azt, hogy áramkörök ki- illetve bekapcsolásakor egy másik vezető hurokban feszültség keletkezik. Korábban közhiedelem volt az, hogy szemben az elektrosztatikával, ahol töltött test töltésmegosztást képes létrehozni egy másik testben, az áram nem képes áramot indítani egy másik vezető hurokban. Faraday azt vette észre, hogy az áram megváltozása képes erre. Faradaynek mellesleg számos elektromossággal kapcsolatos felfedezést és konstrukciót tulajdoníthatunk (elektromotor, az elektrolízis, a dielektrikumok vizsgálata, a fény polarizációjának mágneses térben való elfordulását megfogalmazó Faraday-effektus). Mégis, az elektromosság és mágnesség leírására vonatkozó egyik legfontosabb ötlete az volt, hogy ezeket ez effektusokat egy mező bevezetésével lehet legjobban megközelíteni.

Ezt az ötletet fejlesztette tovább *J.C. Maxwell*, aki hosszas munkával 1855-1873 közötti időszakban megfogalmazta az elektromágnesség matematikai leírását, a Maxwell-egyenleteket. A kezdeti mechanisztikus modellektől egészen a kizárólag az absztrakt elektromos és mágneses tereket tartalmazó leírásig ívelő gondolatsor nagy tudományos vívmány volt, érvényessége a mai napig változatlanul fennáll. Maxwell nevéhez fűződik a vektorpotenciál bevezetése is.

Lényegében a Maxwell-egyenletek felírásával befejeződött az elektrodinamika törvényeinek felderítése. Az egyenletek mai formájának megalkotásában *H. Hertz* szerzett érdemeket, aki másrészt 1886-ban kísérletileg is kimutatta az elektromágneses hullámokat, ezzel igazolva a Maxwell-egyenletek jóslatait. Ő mutatta meg azt is, hogy a fény elektromágneses hullám. *H.A. Lorentz* 1875-ben pedig felírta a Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében érvényes formáját. 1891-ben állt elő az elektron-elméletével, megfogalmazta a Lorentz-erőt. Az ő nevéhez fűződik a Lorentz-transzformációk felírása, amely a speciális relativitáselméletben döntő szerepet kapott.

Bár az elektrodinamikai alap kutatások a XIX. század végére lezárultak, a különböző alkalmazások a mai napig életünket alapvetően meghatározzák. Az elmélet fejlődésére később, a kvantummechanika felfedezésével került sor, amikor is a kvantumelektrodinamika megfogalmazódott *P. Dirac*, *W. Pauli* és nem utolsósorban *Wigner Jenő* munkássága alapján.

2. fejezet

Elektrosztatika

2.1. Elektrosztatika alaptörvényei

2.1.1. Coulomb törvény, szuperpozíció

Az elektromosan aktív anyag a töltésén keresztül képes más töltött anyagra erőhatást gyakorolni. A töltés mértékegysége SI-ben a Coulomb. Ezt nem az elektrosztatikában definiálják, hanem az áram mértékegységéből, az Amperből, mint $1\text{C} = 1\text{As}$ azaz 1 Amper áram által 1 másodperc alatt szállított töltés. Ehhez persze kell az áram definíciója, ez az áram mágneses hatásából adható meg, l. később.

A tapasztalatok szerint egy makroszkopikus test által kifejtett erőhatás leírható úgy, mint az anyag egyes darabkái által kifejtett erőhatás összege (szuperpozíció elve). Emiatt elegendő, ha végtelenül kicsiny anyagdarab által kifejtett erőhatást írjuk fel. Az anyag végtelen finomításával jön létre a ponttöltés fogalma, amely egyetlen fizikai pontra koncentrálódó töltés. Ez egyrészt absztrakció, azonban a valódi anyag töltése ténylegesen az atom alkotórészein (proton és elektron), azaz igen kis helyen koncentrálódó töltések összessége, melyek nagysága az elemi töltés ($1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$) egész számszorosa.

Ha a töltés mértékegységét már rögzítettük, megmérhetjük, hogy mekkora erővel hat egymásra két ponttöltés. Coulomb mérései alapján az \mathbf{x}_1 helyen levő q_1 ponttöltés által az \mathbf{x}_2 helyen levő q_2 ponttöltésre ható erő

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (2.1)$$

Itt q_1 és q_2 Coulomb-ban mérendő, a k faktor értéke $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ahol $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\text{ Vm/C}$, a vákuum permittivitása¹. Mivel ϵ_0 igen kicsi, ezért ez az erőhatás rendkívül nagy, két 1 C-os ponttöltés egymásra kb. $9 \cdot 10^9\text{ N}$ erővel hat: ez több, mint 100000 elefántbika együttes súlya.

Faraday és Maxwell új fogalmat vezettek be a fizikába: a mező vagy tér fogalmát. Eszerint a ponttöltés nem közvetlenül a másik töltésre hat, hanem valójában létrehoz a tér minden pontjában egy elektromos mezőt, és ezt a mezőt érzékeli a másik test:

$$\text{forrás} \longrightarrow \text{mező} \longrightarrow \text{erőhatás} \quad (2.2)$$

Ezen kép segítségével a fenti erőhatást két részre bontjuk: a q_1 töltésű ponttöltés először létrehoz maga körül egy elektromos mezőt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \frac{q_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (2.3)$$

Ebbe az elektromos mezőbe helyezett q_2 ponttöltés erőhatást érez, melynek nagysága

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_2). \quad (2.4)$$

¹Megjegyzés: CGS rendszerben $k_{CGS} = 1$.

Természetesen a két képlet összeolvasva visszaadja (2.1) képletet. A fenti felbontásnak ilyen módon elvi jelentősége van, lehetővé teszi, hogy erőhatások helyett az elektromos térről beszéljünk, amely csak egy töltéstől függ, míg az erő mindkettőtől. Később a mezők hasznos fogalomnak fognak bizonyulni a távolhatások és retardálás leírásában (l. később).

2.1.2. Elektromos mező, Maxwell 1. egyenlete

Matematikailag az elektromos tér egy vektor-mező, vagyis egy $\mathbf{E} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképzés, ahol \mathbf{M} jelenti a három dimenziós fizikai terünket, vagyis egy adott koordináta-rendszerben azonosítható \mathbf{R}^3 -nel. A jobb oldalon szereplő \mathbf{R}^3 pedig azt jelenti, hogy a tér minden egyes pontjában az elektromos térnek három komponense van. Konkrétan a (2.3) mező esetén a három komponens Descartes-koordinátákban

$$E_x(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(x - x_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}, \quad E_y(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(y - y_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}, \quad E_z(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(z - z_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3},$$

ahol $\mathbf{x} = (x, y, z)$ és $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. A három komponenset máskor $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ módon is jelölni fogjuk, ekkor összefoglaló jelöléssel

$$E_i(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(x_i - (x_1)_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

A mezőkkel kapcsolatos matematikai műveletek iránt érdeklődő olvasót a Függelék A fejezetének áttekintésére biztatjuk.

A szuperpozíció az elektromos tér szintjén azt jelenti, hogy több töltés együttes tere az egyes töltések által létrehozott terek összege. Ha egy ponttöltés-rendszerünk van, amelyben q_1, \dots, q_n töltések $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ helyen találhatók, akkor a létrehozott elektromos tér:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.5)$$

Egy makroszkopikus anyag töltése helyről helyre változhat. Vegyünk egy $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ térfogatelemet az \mathbf{x}_i pont körül, amelyben a $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$ mennyiség csak kicsit változik. Ha ebben a térfogatban $q_i = \rho(\mathbf{x}_i) \Delta V$ töltés található, akkor az előző képletet átírhatjuk, mint

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1} \rho(\mathbf{x}_i) \Delta V \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.6)$$

Ha van értelme a folytonos határesetnek, azaz ha $\Delta V \rightarrow 0$ esetén a $\rho(\mathbf{x})$ függvény értelmes marad, akkor a fenti összegzésből integrálba mehetünk át:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}} \quad (2.7)$$

Descartes-komponensekben kifejezett alakja pedig

$$E_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{x_i - x'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.8)$$

A közelítés logikájából látszik, hogy ponttöltések közvetlen közelében nem lesz jó a folytonos töltéseloszlás-kép, ott az egyes töltéseket külön kell figyelembe venni. Ugyanakkor matematikailag a ponttöltés megfogalmazható mint egy speciális töltéseloszlás:

$$\text{ponttöltés } \mathbf{x}_0 \text{ helyen} \longrightarrow \rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.9)$$

amivel a ponttöltés rendszer töltéeloszlása

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.10)$$

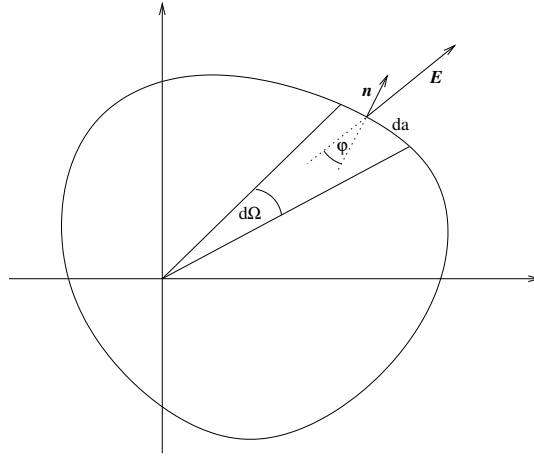
Itt $\delta(\mathbf{x})$ a 3D Dirac-delta *disztribúció*, amely olyan függvény, amely az origó kivételével mindenhol nulla, a teljes térre vett integrálja mégis 1. Matematikailag megfogalmazható tulajdonságai

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(x \neq 0) = 0, \quad \int dx f(x) \delta(x) = f(0). \quad (2.11)$$

A Dirac-deltára gondolhatunk úgy, mint a $\delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$ függvény sorozat eredményére ha $\varepsilon \rightarrow 0$: egy egyre vékonyodó, de egyre magasodó csúcsra. Később használni fogjuk, hogy változóhelyettesítés hatására

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{x_i, \\ f(x_i)=0}} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \quad (2.12)$$

A ponttöltés terének van egy különleges tulajdonsága. Integráljuk ki egy zárt felületre, l. 2.1 ábrán. A számítás során felhasználjuk, hogy a kis da felületelemnek a ponttöltés helyéből húzott helyvektorra merőleges vetületére fennáll $da \cos \varphi = r^2 d\Omega$, és az elektromos tér és a felület normálisának szorzata $\mathbf{E}\mathbf{n} = E \cos \varphi$. Így végülis azt kapjuk, hogy



2.1. ábra. Zárt felületre integráljuk a ponttöltés elektromos terét.

$$\oint d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int da \mathbf{n} \mathbf{E} = \int d\Omega \frac{r^2}{\cos \varphi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & \text{ha } q \in V \\ 0 & \text{ha } q \notin V \end{cases} \quad (2.13)$$

Vagyis a fenti integrál csak akkor nem nulla, ha a töltés benne van a felület által bezárt térfogatban! A szuperpozíció miatt ponttöltés rendszerénél az adott térfogaton belül levő töltések összegét fogjuk kapni. Ez könnyen általánosítható töltéeloszlásra is

$$\boxed{\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})} \quad \text{Gauss-törvény,} \quad (2.14)$$

hiszen a jobb oldalon a V térfogaton belüli ösztöltést számoltuk össze. A felületi integrált át lehet írni a Gauss-tétel segítségével

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Mivel ez igaz *minden* térfogatra, ezért levonhatjuk a következtetést:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}} \quad \text{Maxwell I,} \quad (2.16)$$

Ez már *lokális* törvény, Maxwell 1. egyenlete, amely differenciálegyenletet ad az elektromos tér és a töltéssűrűség kapcsolatára.

2.1.3. Potenciál-függvény, Maxwell 2. egyenlete

A ponttöltés tere mást is tud:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.17)$$

Ennek bizonyításához egy általános centrális függvény gradiensét határozzuk meg, vagyis ahol $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(r)$ és $r = |\mathbf{x}|$. Mivel $r^2 = \sum_i x_i^2$, így

$$[\operatorname{grad} f(r)]_i = \partial_i f(r) = \frac{\partial(r^2)}{\partial x_i} \frac{df}{d(r^2)} = 2x_i \frac{1}{2r} \frac{df}{dr} = \frac{x_i}{r} f'(r) = \hat{\mathbf{x}} f'(r). \quad (2.18)$$

Ha $f(r) = 1/r$, akkor $f'(r) = -1/r^2$; figyelembe véve még egy \mathbf{x}_1 -gyel való eltolást is, a fenti összefüggést bizonyítottuk.

Eszerint (2.7) egyenletet átalakítva kapjuk:

$$\boxed{E_i(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x})}, \quad (2.19)$$

ahol

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}. \quad (2.20)$$

Φ neve skalárpotenciál vagy egyszerűen potenciál. A potenciálnak nincs közvetlen fizikai jelentése, belőle nem származik erőhatás, csupán egy segédmenyiség. Mivel csak a gradiense, azaz deriváltja mérhető, ezért egy konstanssal eltolható. Speciálisan megadhatjuk egy \mathbf{x}' -be helyezett q nagyságú ponttöltés potenciálját:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (2.21)$$

További példákat később nézünk meg.

A potenciál létének, valamint a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ azonosság következménye, hogy

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0} \quad \text{Maxwell II (sztatika).} \quad (2.22)$$

Ez Maxwell 2. egyenlete, amely az elektrosztatikában érvényes.

2.1.4. Poisson-egyenlet

A potenciál és a töltéseloszlás kapcsolatára is levezethetünk egyenletet. (2.16) egyenlet divergenciáját véve kapjuk

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\Delta\Phi = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Delta\Phi = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}}. \quad (2.23)$$

Az ilyen típusú egyenletet *Poisson-egyenletnek* nevezzük. Alkalmazva a ponttöltés (2.21) potenciáljára, láthatjuk, hogy

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Ezt az összefüggést később még használni fogjuk.

Ha a térerősséget ismerjük, abból is kiszámítható a potenciál. Legyen $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ a térerősség, és integráljuk ki egy tetszőleges \mathbf{x}_1 -ből \mathbf{x}_2 -be vezető görbe mentén:

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} ds_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) \quad (2.25)$$

Ezzel az \mathbf{x}_1 -beli és \mathbf{x}_2 -beli potenciálok különbségét kapjuk. Természetesen nem határozható meg a potenciál abszolút értéke, hiszen az egy konstans erejéig határozatlan. Amit megtehetünk, hogy választunk egy referencia pontot, \mathbf{x}_0 -t és ebben a pontban lerögzítjük $\Phi(\mathbf{x}_0)$ értékét. Egy célszerű választás lehet például a $\mathbf{x}_0 = \infty$ és $\Phi(\mathbf{x}_0) = 0$, azonban ez csak akkor tehető meg, ha az összes töltésünk egy véges térrészben található. Ekkor

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) \quad (2.26)$$

Ha lerögzítjük $\Phi(\mathbf{x}_2)$ -t, és más görbe mentén érjük el \mathbf{x}_1 -et, akkor elvileg kaphatnánk más eredményt a térerősség integráljára, ekkor $\Phi(\mathbf{x}_1)$ értéke függene a választott úttól. Azonban Maxwell II törvényét és a Stokes tételt használva írhatjuk a kétféleképpen számolt $\Phi(\mathbf{x}_1)$ -ek különbségére

$$\delta\Phi(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} ds' \mathbf{E}(\mathbf{s}') = \oint d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = \int_F d\mathbf{f} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.27)$$

Vagyis a sztatikában érvényes II. Maxwell törvény következtében a potenciál egyértelmű. Az ilyen eseteket nevezzük konzervatív mezőnek.

2.1.5. Töltésrendszer energiája

Elektromos mezőben mozgó töltésre ható erő $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Ha fel akarunk építeni egy töltésrendszert, ez ellen az erő ellen kell dolgoznunk, vagyis $-\mathbf{F}$ erőt kell kifejtenünk. $d\mathbf{x}$ elmozdulás esetén az általunk végzett munka:

$$dW = -\mathbf{F}d\mathbf{x} = -q\mathbf{E}d\mathbf{x} \Rightarrow W_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2} = -q \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = q(\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)). \quad (2.28)$$

(2.27) képlet alapján az $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$ mozgásnál végzett munka független a pályától. Ha $\mathbf{x}_1 = \infty$, és $\Phi(\infty) = 0$ (ez véges töltésrendszerrel mindig megtehető), akkor $W_{\infty \rightarrow \mathbf{x}} = q\Phi(\mathbf{x})$.

Az általunk végzett munka – az energiamegmaradás miatt – a töltésrendszer energiájában tárolódik. Ezért a fenti képletet a következőképpen értelmezzük: ha van egy töltésrendszerünk, amely már létrehozott egy $\mathbf{E}(\mathbf{x})$

térerősséget, s ehhez hozzáadunk egy δq töltést a végtelenből \mathbf{x}_0 helyre, akkor a töltésrendszer energiájának változása

$$\delta W = \delta q \Phi(\mathbf{x}_0). \quad (2.29)$$

Teljes töltésrendszer felépítésénél egyesével tesszük be a töltéseket, az újonnan betett töltések a régiéknak terét érzik:

$$W = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.30)$$

Itt ki kell hagyni az $i = j$ esetet, mert ekkor végtelent kapnánk.

Folytonos esetre is könnyen átfogalmazhatók a fenti gondolatok: ekkor egy $\delta \rho$ töltéseloszlással módosítjuk a már meglévő töltésrendszerünket, ekkor

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

A teljes töltéseloszlás energiájához felhasználjuk (2.20) egyenletet:

$$\delta W = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\delta \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right), \quad (2.32)$$

hiszen a kis változás (amely a deriválással analóg fogalom) vagy az első, vagy a második tagra hat, de mindkettő járuléka egyforma. Így kapjuk

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.33)$$

Felhasználva a Maxwell egyenletet (2.16), valamint az $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ képletet

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \Phi \partial_i E_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \partial_i (\Phi E_i) - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} (\partial_i \Phi) E_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^2 x_i \Phi E_i + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (2.34)$$

Az első tag nulla, mert a végtelenben $\Phi = 0$, így marad

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (2.35)$$

Ez az elektrosztatikus energia kifejezése a térerősségekkel kifejezve. Észrevehetjük, hogy az energia egy lokális mennyiség térintegráljaként áll elő, $W = \int d^3\mathbf{x} w(\mathbf{x})$. Emiatt beszélhetünk az energia sűrűségéről, amelynek kifejezése

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2. \quad (2.36)$$

Látszólag (2.30) kifejezésből (2.35) közvetlenül nyerhető, mégis, míg az utóbbi pozitív eredményt ad, az első lehet negatív is – például abban az egyszerű esetben, mikor két, egymással ellentétes ponttöltésünk van. Az ellentmondás feloldására vegyük észre, hogy az első esetben kizártuk az $i = j$ esetet, a folytonos leírásban erre nem volt mód. Úgy fogalmazhatunk, hogy a folytonos eset tartalmazza a „sajátenergiát” is. Például ha egy ponttöltésre kiszámítjuk a (2.35) integrált, végtelent kapunk, míg természetesen (2.30) nullát adna. Ha valahogyan regularizáljuk az integrált (pl. hipotetikus „elektronsugár” bevezetésével), akkor véges eredményt kapunk a sajátenergiára. Ha pedig kivonjuk a két ponttöltés (2.35) képlet alapján számolt teljes energiájából a két különálló ponttöltés sajátenergiáját, akkor már a (2.30) eredménnyel konzisztens végeredményt kapunk.

2.1.6. Erővonalkép

Vektormezők ábrázolására különböző módszerek vannak. Lehet a tér kiválasztott pontjaiban kis nyilacskákkal érzékelteni a vektormező nagyságát és irányát. Potenciális vektormező esetén (vagyis ha a rotációja nulla) megrajzolhatjuk a $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0$ konstans potenciálú (ekvipotenciális) felületeket. Mivel a vektormező a potenciál gradiense, így merőleges az ekvipotenciális felületekre. A vektormező nagysága pedig – egyenletes lépésekkel változtatott Φ_0 felületsereg megrajzolása esetén – az ekvipotenciális felületek sűrűségével lesz arányos.

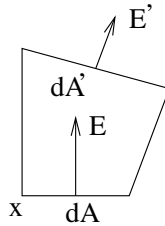
Ugyanakkor lehetséges erővonallakkal is szemléltetni a vektormezőt. Ennek definiálásához vegyük \mathbf{E} vektormezőt, és definiáljunk egy olyan $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ görbét melyek érintője éppen \mathbf{E}

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \mathbf{E}(\gamma(\tau)). \quad (2.37)$$

Ezek a görbék az erővonalak, melyből a térerősség irányát kaphatjuk meg. Mivel $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$, az erővonalak az ekvipotenciális felületre merőlegesek.

A térerősség nagyságára a görbék érzéketlenek, hiszen csupán a paraméterezést változtatja meg. A térerősség nagysága ezért az erővonalak *sűrűségével* adható meg: egy \mathbf{E} -re merőleges adott felületen átmenő erővonalak száma legyen egyenesen arányos \mathbf{E} nagyságával.

Ha az erővonalak sűrűségét egy adott felületen definiálhatjuk, és a vonalakat a (2.37) egyenletnek megfelelően folytatjuk, akkor egy másik felületen kiszámíthatjuk a sűrűségüket. Ez nem feltétlenül esik egybe a sűrűség térerősség nagyságából történő kiszámításával. Mikor konzisztens tehát az erővonal kép? Vegyünk egy olyan infinitezimális térfogatot, amely egyik sarok pontja \mathbf{x} , az alaplappal merőleges $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ -re, az oldalélek pedig a sarokpontokban érvényes térerősségekkel párhuzamosak (l. 2.2 ábra). E térfogatra integrálva \mathbf{E} -t,



2.2. ábra. Erővonalak konzisztenciája: az erővonalak közötti távolság az erővonalak széttartásával (divergenciájával) kell összefüggésben legyen.

az oldalapok nem adnak járulékot, hiszen ott a normális merőleges a térerősségekre. Az alaplapon $\mathbf{n} \parallel \mathbf{E}$, vagyis

$$\oint d\mathbf{f}\mathbf{E} = dA'E' - dAE. \quad (2.38)$$

Mivel az erővonalak sűrűsége, feltételezésünk szerint, mindenhol arányos a térerősséggel, azaz $E dA = \text{konstans}$, így ennek az integrálnak nullának kell lennie.

Ugyanakkor a Gauss tétel szerint az integrál megegyezik $\text{div } \mathbf{E}$ térfogati integráljával. Mivel a térfogat infinitezimális, itt a $\text{div } \mathbf{E}$ konstansnak vehető. A fenti összefüggés miatt tehát

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2.39)$$

Az erővonal-kép tehát akkor konzisztens, ha a vektormező divergenciamentes. Divergencia esetén (pl. ha töltést helyezünk a térbe), új erővonalakat kell indítani a divergencia forrásából.

2.2. Potenciálemélet

2.2.1. Speciális töltéeloszlások tere

Nézzünk meg néhány példát töltéeloszlások által létrehozott potenciálokra. Az általános képlet természetesen (2.20), de olykor integrálás nélkül is boldogulunk.

Dipólus tere: két ellentétes, de egyenlő abszolút értékű potenciált egymás mellé rakva kapjuk a dipólus potenciálját. Tegyük a $-q$ töltést $-\mathbf{a}/2$ helyre, a $+q$ töltést a $\mathbf{a}/2$ helyre, ekkor \mathbf{a} -hoz képest nagy távolságra a potenciál, felhasználva (2.21) képletet

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{a}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \Rightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}}, \quad (2.40)$$

ahol bevezettük a $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ dipóluserősséget. Ha $\mathbf{a} \rightarrow 0$, miközben \mathbf{p} véges marad, akkor a fenti képlet minden $\mathbf{x} \neq 0$ helyen érvényes lesz.

A térerősségre a következőt kapjuk:

$$E_i(\mathbf{x}) = -\partial_i\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{p_j}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3x_i\mathbf{p}\mathbf{x} - p_i\mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{p}\mathbf{x}) - \mathbf{p}\mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5} \quad (2.41)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\partial_i x_j = \delta_{ij} \quad \text{és} \quad \partial_i |\mathbf{x}| = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \quad (2.42)$$

Egyenletesen töltött végtelen síklap tere: vegyünk most egy végtelen sík felületet, és töltsük fel egyenletes σ felületi töltéssűrűséggel. Ez azt jelenti, hogy a felület egy dA darabján elhelyezkedő töltés nagysága σdA . A határozottság kedvéért a felület legyen az x - y síkban, vagyis a töltéssűrűség $\rho(x, y, z) = \sigma\delta(z)$.

A térerősség illetve potenciál közvetlen számítása helyett használjuk ki a töltéselrendezés *szimmetriáját*. Mivel az nem függ x, y -től, hiszen az x - y síkban eltolás-invariáns a megadott eloszlás, ezért feltehető, hogy a potenciál sem fog x, y -től függeni. Ha viszont $\Phi(z)$, akkor a térerősség nem nulla komponense csak $E_z(z)$ lesz. Legyen $z \leq 0$ -ra a potenciál $\Phi^\pm(z)$, a térerősség $E_z^\pm(z)$.

Vegyünk most egy olyan T téglalapot, amely merőleges a felületre, és integráljuk \mathbf{E} -t a felületére. Mivel a téglalap oldalain $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, csak a tetején és az alján kapunk járulékot, ennek nagysága $dA(E_z^+(z) - E_z^-(z))$, ahol dA az alapterület. A Gauss-törvény miatt ez arányos a téglalap belsejében levő töltéssel, ami $dA\sigma$. Innen

$$E_z^+(z) - E_z^-(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.43)$$

Látható módon csak annyi megkötést kapunk, hogy a térerősség felületre merőleges komponensének ugrása σ/ϵ_0 . Ahhoz, hogy magukat a térerősségeket is meg tudjuk adni, a végtelenben érvényes határfeltételeket kell megadni.

Ha z és $-z$ egymással egyenértékű, akkor

$$E_z^+(z) = -E_z^-(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \Phi(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\epsilon_0}. \quad (2.44)$$

Ha az egyik oldalon ($z < 0$) a térerősség nulla (pl. fém belseje), akkor

$$E_z^+(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \Phi^+(z) = -\frac{\sigma z}{\epsilon_0}. \quad (2.45)$$

Megfigyelhetjük, hogy a potenciál végtelenhez tart, ha $z \rightarrow \infty$. Ahogyan korábban említettük, csupán véges töltéeloszlások esetén biztosított, hogy a potenciál nullának választható a végtelenben. A végtelen síklap tere ellenpélda abban az esetben, ha végtelen töltéeloszlásunk van.

Egy triviális eset: ha $\sigma = 0$, akkor $E_z^+(z) - E_z^-(z)$, azaz a térerősség normális komponense folytonos.

Egyenletesen töltött vonaltöltés tere: most egy végtelen egyenes töltéseloszlást vegyünk, amelynek vonal menti töltéssűrűsége legyen η – azaz a töltés minden $d\ell$ szakaszon $\eta d\ell$. Ha az egyenest a z tengelynek választjuk, akkor a töltéssűrűség képlete $\rho(x, y, z) = \eta\delta(x)\delta(y)$.

Az előző esethez hasonlóan itt a szimmetria azt diktálja, hogy nem függhet semmi z -tól és φ -tól. A potenciál tehát konstans kell legyen az egyenest körbevevő hengerpaláston, és emiatt a térerősségnek csak a hengerpalástra merőleges komponensei lehetnek. Vegyük most körbe az egyenest egy olyan hengerrel, amelynek sugara r , magassága h , és integráljuk ki a térerősséget ennek felületére. A fentiek miatt csak a paláston kapunk járulékot, értéke $2\pi r h E$. Ez arányos a bezárt töltéssel, vagyis

$$2\pi r d\ell E = \frac{1}{\varepsilon_0} d\ell \eta \Rightarrow E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \Phi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (2.46)$$

A potenciál itt is végtelenhez tart, ahogyan $r \rightarrow 0$ vagy $r \rightarrow \infty$, ezért kellett bevezetnünk egy köztes r_0 referencia pontot.

2.2.2. Poisson-egyenlet határfeltételekkel

Eddig azt tanulmányoztuk, hogy milyen potenciál illetve térerősség alakul ki, ha ismerjük a töltéseloszlást. Azonban általában nem tudjuk rögzíteni a töltéseket, pl. azért, mert az anyagban elmozduló töltéshordozók vannak, így magától töltéstöbblet illetve hiány alakulhat ki. Ekkor nem tudjuk a térerősséget sem kiszámolni közvetlenül.

Láttuk (2.23)-ban, hogy a potenciál egy Poisson-egyenletnek tesz eleget. Az anyagi közegek jelenléte határfeltételeket szab a megoldásnak. Tipikus határfeltételek:

- **fém felülete** (tökéletes vezető): ha a fém belsejében a töltések a legkisebb térerősség hatására is elmozdulnak, akkor olyan töltéseloszlás alakul ki, amely teljesen lenullázza a belső térerősséget. Ezért fém belsejében nem lehet \mathbf{E} , a felületen pedig $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ a felület normálisával. Emiatt a fém felületén $\oint d\mathbf{x} \mathbf{E} = 0$, a fém felülete *ekvipotenciális*.
- **felületi töltéssűrűség:** ha a felületen valamilyen töltéssűrűség adott, a felület túloldalán $\mathbf{E} = 0$, akkor $\mathbf{E} = \mathbf{n}\sigma/\varepsilon_0$ (l. (2.45))

Ennek általánosításaként a megoldandó feladat:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Phi(\mathbf{x}_f) = \text{adott} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{n} \text{ grad } \Phi(\mathbf{x}_f) \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \text{adott}, \quad (2.47)$$

ahol $\mathbf{x}_f \in$ felület. A felület lehet nem összefüggő (azaz több felület), és lehet a végtelenben is. Az első fajta határfeltételt *Dirichlet*, a második fajtat *Neumann* határfeltételnek hívjuk.

Először bebizonyítjuk, hogy a Poisson-egyenlet megoldása egyértelmű, adott határfeltételek esetén:

Tétel: Legyen $\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = -\rho/\varepsilon_0$, ugyanazokkal a határfeltételekkel. Ekkor $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{konstans}$.

Bizonyítás.: Legyen $K = \Phi_1 - \Phi_2$, erre igaz, hogy $\Delta K = 0$, és a határon $K = 0$ vagy $\mathbf{n} \text{ grad } K = 0$ (a konkrét határfeltételtől függően). Alkalmazzuk a Gauss-tételt (A.8) a $K \text{ grad } K$ vektormezőre:

$$\int_V d^3\mathbf{x} \text{ div}(K \text{ grad } K) = \int_V d^3\mathbf{x} [(\text{grad } K)^2 + K\Delta K] = \int_V d^3\mathbf{x} (\text{grad } K)^2 = \oint_S d\mathbf{f} K \text{ grad } K = 0. \quad (2.48)$$

Mivel a teljes térre integrálva egy pozitív függvényt 0-t kapunk, ezért a függvény maga nulla kell legyen: $\text{grad } K = 0$, azaz $K = \text{konstans}$.

QED.

2.2.3. Green-függvény módszer, Green tétele

A következőkben megmutatjuk, hogy ha meg tudjuk oldani a feladatot egyetlen ponttöltésre valamilyen jól választott határfeltételek mellett, akkor meg tudjuk oldani tetszőleges töltéeloszlásra is. Keressünk tehát egy olyan $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényt, amely kielégíti a

$$\boxed{\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (2.49)$$

egyenletet, később megadott határfeltételekkel. G neve *Green-függvény*, fizikailag egy \mathbf{y} -ba helyezett egységnyi ponttöltés potenciálja. Mivel az egyenlet szimmetrikus az \mathbf{x} és \mathbf{y} cseréjére, ezért $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ is szimmetrikus függvénye lesz a két argumentumának. Ha a végtelenben vett határfeltételeket nézünk, ahol nulla potenciált határozunk meg, akkor a megoldás a szokásos (2.21) $q = 1$ választással.

Fontos megjegyezni, hogy a ponttöltésen kívüli térrészre (2.49) a *Laplace-egyenletet* adja:

$$\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (2.50)$$

azaz $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bármely $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvénnyel eltolható, amire teljesül $\Delta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Azonban végtelen térre a Laplace-egyenlet korlátos megoldása csak konstans lehet, így $F = 0$ és a Green-függvény egyértelmű lesz.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel: *G. Green, 1824:* legyen φ és ψ két skalármező, V egy térfogatelem, $S = \partial V$ a felülete. Ekkor

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\varphi(\mathbf{x})\Delta\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\Delta\varphi(\mathbf{x})) = \oint_S d\mathbf{f} (\varphi(\mathbf{x})\nabla\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\nabla\varphi(\mathbf{x})). \quad (2.51)$$

Bizonyítás.: Használjuk a Gauss-tételt (A.8) $U_1 = \varphi\nabla\psi$ és $U_2 = \psi\nabla\varphi$ vektormezőkre.

$$\operatorname{div} U_1 = (\nabla\varphi)(\nabla\psi) + \varphi\Delta\psi, \quad \operatorname{div} U_2 = (\nabla\varphi)(\nabla\psi) + \psi\Delta\varphi. \quad (2.52)$$

Ezért

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\operatorname{div} U_1 - \operatorname{div} U_2) = \int_V d^3\mathbf{x} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) = \oint_S d\mathbf{f} (U_1 - U_2) = \oint_S d\mathbf{f} (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi). \quad (2.53)$$

QED.

Alkalmazzuk a Green-tételt $\psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $\varphi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ esetre. Használva (2.47) és (2.49) egyenleteket

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\Phi(\mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \oint_S d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} (\Phi(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x})), \quad (2.54)$$

átrendezve

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} (\Phi(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x})). \quad (2.55)$$

Mivel $d\mathbf{f} \sim \mathbf{n}$, a gradiensből csak a normális irányú deriváltak számítanak.

Tisztán Dirichlet-féle határfeltétel esetén válasszuk a Green-függvény határfeltételének

$$\boxed{G(\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S) = 0} \quad (\text{Dirichlet}). \quad (2.56)$$

Ekkor a második tag nulla, ezért

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.57)$$

Tisztán Neumann-féle határfeltétel esetén jó lenne ugyanezt csinálni, csak a felületre merőleges deriválttal. Azonban

$$\oint_S d\mathbf{f}_x \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} \Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (2.58)$$

ezért a gradiens nem lehet azonosan nulla. Így most a legegyszerűbb választás

$$\boxed{\mathbf{n} \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = -\frac{1}{\varepsilon_0 |S|} \quad (\text{Neumann}),} \quad (2.59)$$

ahol $|S|$ a felület nagysága. Ezzel

$$\Phi(\mathbf{y}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f}_x \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.60)$$

ahol $\langle \Phi \rangle_S$ a potenciál átlaga a felületen, ez nem határozható meg a tisztán Neumann határfeltételeknél.

Vagyis elég a Poisson-egyenletet ponttöltésre megoldani, Dirichlet határfeltételek esetén nulla felületi potenciállal. Persze ez is igen bonyolult feladat, amelynek számos megoldási módszere lehetséges. A legáltalánosabb esetben csak numerikus módszereket alkalmazhatunk, de speciális esetekben segíthet a megoldás megsejtése (pl. tükröltések módszere, két dimenziós függvények használata).

2.2.4. Kapacitás

Mielőtt a részletekbe belemennénk, vizsgáljuk meg az elektrodinamika szuperpozíciós elvének tükröződését a potenciál problémák megoldásában. Ehhez vegyünk egy olyan rendszert, amely fém felületeket tartalmaz, különböző potenciálokra feltöltve. A felületeket jelöljük S_i -vel, a rajtuk érvényes potenciált V_i -vel. Az szuperpozíciós elv és a Dirichlet határfeltételekre érvényes (2.57) képlet alapján állíthatjuk (ahol most $\rho = 0$, hiszen nem tettünk be külső töltést), hogy a potenciál a tér tetszőleges pontjában lineáris függvénye lesz a felületi potenciáloknak.

$$\Phi(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{y}) V_j. \quad (2.61)$$

Másrészt a felületi töltéssűrűség a felületen érvényes potenciál felületre merőleges deriváltjával arányos (l. (2.45)), ezért az i -dik felületén levő össztöltés lineáris függvénye lesz a felületi potenciáloknak

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (2.62)$$

Az együttható a *kapacitás*, általában egy mátrix. A rendszer energiája, felhasználva, hogy a felületek ekvipotenciálisak:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \oint_{S_i} d\mathbf{f}_x \sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{ij} V_i V_j. \quad (2.63)$$

Termodinamikai megfontolások alapján a kapacitásmátrix szimmetrikus kell legyen.

Ha ismerjük a rendszerünk Green-függvényét Dirichlet határfeltételekkel, akkor a kapacitás könnyen megadható. Legyen a Green-függvény $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ekkor – mivel most $\rho = 0$ – (2.57) egyenlet szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_j} d\mathbf{f}_x \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^n V_i f_i(\mathbf{y}). \quad (2.64)$$

A i . felületen levő töltés a felületi töltés összege

$$Q_i = \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \sigma_j(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \nabla_y \Phi(\mathbf{y}) = \varepsilon_0^2 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \cdot \nabla_y \oint_{S_j} d\mathbf{f}_x \cdot \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.65)$$

Innen a kapacitás

$$C_{ij} = \varepsilon_0^2 \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \oint_{S_j} d\mathbf{f}_x \nabla_y \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.66)$$

ahol két skaláris szorzat szerepel: a $d\mathbf{f}_x$ felületvektor az \mathbf{x} szerinti, míg a $d\mathbf{f}_y$ felületvektor az \mathbf{y} szerinti gradienssel van összeejtve. Ez valóban egy i -ben és j -ben szimmetrikus mátrix.

Egyszerű esetekben a potenciálok alapján meg lehet mondani a töltés nagyságát, ekkor a kapacitás könnyen leolvasható. Pl.

- gömb kapacitása: Q töltésű R sugarú gömb tere megegyezik egy origóba helyezett ponttöltés terével:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (2.67)$$

- síkkondenzátor kapacitása: két A felületű síklap d távolságra, egyike σ , másika $-\sigma$ töltéssűrűséggel. A köztük levő teret konstanssal közelítve $E = \sigma/\varepsilon_0$. Emiatt

$$Q = \sigma A, \quad V = \sigma d/\varepsilon_0 \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{A\varepsilon_0}{d}. \quad (2.68)$$

2.2.5. Tükörtöltések módszere

Vegyünk Dirichlet határfeltételeket, amikor a Green függvény egy ponttöltés tere akkor, ha a határokon mindenütt nulla potenciált rögzítünk. A felületek a teret két (vagy több) részre vágják: a határok közötti fizikai térben érvényes a Poisson egyenlet, a határok belseje pedig a Green-függvény meghatározásánál nulla potenciálú.

A tükörtöltések módszerénél megpróbáljuk a határfeltételeket néhány, a *nem-fizikai* térbe (azaz a határfelületek által elszeparált térrészbe) elhelyezett extra ponttöltéssel kielégíteni. Ez nem megy mindig, de vannak speciális felületek, ahol működik. Mivel az extra töltések a nem-fizikai térben vannak, a fizikai térbeli egyenletek számára nem jelentenek extra forrást, ott az egyenletek változatlanok maradnak.

Síklap Green-függvénye: vegyünk a $z = 0$ síkon megadott Dirichlet határfeltételeket. Ekkor a Green függvényt úgy állítjuk elő, hogy egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pontba elhelyezünk egy egységnyi ponttöltést, a teret keressük $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontban, hogy $\Phi(y_1, y_2, y_3 = 0) = 0$. Ennek a feltételnek nyilván megfelel egy olyan rendszer, ahol $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, -x_3)$ pontba leteszünk egy (-1) ponttöltést, hiszen a teljes megoldás ekkor

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|} \right], \quad (2.69)$$

komponensekben kiírva

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 + x_3)^2}} \right]. \quad (2.70)$$

Mivel a tükörtöltést a $-x_3$ helyre tettük, az $x_3 > 0$ fizikai térrészben valóban csak egy ponttöltés szerepel. Másrészt az is igaz, hogy $\Phi(y_3 = 0) = 0$, mert ekkor a két tag egyenlő nagyságú. Vagyis a fenti G valóban a Green-függvény.

Kérdés: mi a síklap Green-függvénye az $x_3 < 0$ térrészben?

Gömb Green-függvénye: vegyünk egy R sugarú gömböt az origó körül, és keressük a Green-függvényt a $r > R$ tartományban. Ehhez egy ponttöltésre kell megoldanunk a $\Phi(r = R) = 0$ határérték-feladatot. A gömbszimmetria miatt válasszuk a ponttöltés helyét a $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ pontnak. Tegyük fel, hogy a tükörtöltések módszere működik egyetlen, a gömb belsejébe $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ helyre betett $-q$ nagyságú tükörtöltéssel. Vagyis a feltevésünk szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{q}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} \right], \quad (2.71)$$

komponensekben kifejezve

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2}} - \frac{q}{\sqrt{(y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right]. \quad (2.72)$$

Próbáljuk úgy választani x_1' -t és q -t, hogy a $\Phi = 0$ felület egyenlete $\mathbf{y}^2 = R^2$ legyen

$$\begin{aligned} q^2 [(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2] &= (y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ q^2 [x_1^2 - 2y_1x_1 + R^2] &= x_1'^2 - 2y_1x_1' + R^2 \quad \forall y_1. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ez teljesíthető, mert két változónk van, és a fenti egyenlet lineáris:

$$q^2 [x_1^2 + R^2] = x_1'^2 + R^2 \quad q^2 x_1 = x_1'. \quad (2.74)$$

$$(q^2 - 1)(q^2 x_1^2 - R^2) = 0 \Rightarrow q^2 = 1 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{R}{x_1}.$$

A $q = 1$ esetre $x_1' = x_1$, ekkor nincs egyáltalán tér. A fizikai megoldás a másik

$$q = \frac{R}{x_1}, \quad x_1' = \frac{R^2}{x_1}. \quad (2.75)$$

Tetszőleges \mathbf{x} és \mathbf{y} esetén a Green-függvény

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{R/|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x} \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{y}^2 \mathbf{x}^2}{R^2} + R^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{y}}} \right]. \quad (2.76)$$

A második formula mutatja, hogy $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Kérdés: mi a gömb Green-függvénye az $r < R$ térrészben?

Feladat: Milyen az egyenletes \mathbf{E}_0 elektromos térbe helyezett földelt gömb tere?

Megoldás: A földeltség azt jelenti, hogy $\Phi = 0$ a felületen. Az egyenletes elektromos teret előállíthatom két töltés közötti térként, ha a töltések végtelen távol vannak, de végtelen erősek. Képletben: q töltés legyen $-x$ helyen, $-q$ töltés x helyen, ekkor az elektromos térerősség közepén

$$E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 x^2 E_0. \quad (2.77)$$

A két ponttöltés két tükörtöltést hoz létre, a töltések nagysága, illetve az origótól való távolságuk

$$Q = qR/x = 2\pi\epsilon_0 x R E_0, \quad x' = R^2/x \quad (2.78)$$

Ha $x \rightarrow \infty$, akkor a tükörtlöltések egy dipólust alkotnak, a dipólerősség $p = 2Qx' = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$. Dipólus potenciálját láttuk (2.40)-ben. Ezért a teljes tér potenciálja vektoros alakban felírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_0 \mathbf{x} \left[1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} \right]. \quad (2.79)$$

Értelmezés: az elektromos tér a kezdetben semleges fémgömböt elektromosan aktív állapotba hozza, *polarizálja*. A polarizáció gömb esetén dipólmomentum kialakulását jelenti, amely arányos a gömb térfogatával. Ennek a dipólnak a nagysága, összehasonlítva (2.40) egyenlettel:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (2.80)$$

Fémgömbben a töltéshordozók végtelenül könnyen elmozdulnak, vagyis a fenti eredmény az adott térfogatban maximálisan kialakuló dipólmomentum.

2.3. Multipólus

2.3.1. Multipólus kifejtés

Tárgyaljuk most *adott* töltéseloszlás terét, amennyiben nagy távolságra vagyunk a teljes rendszertől. Legyen tehát egy lokalizált töltéseloszlásunk, amelynek karakterisztikus mérete a :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.81)$$

Az $|\mathbf{x}| \gg a$ esetben sorba fejthetjük a nevezőt általános koordinátákkal kifejtve:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \dots \quad (2.82)$$

Mivel

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}, \quad (2.83)$$

ezért:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}' \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}' \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2 \mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \quad (2.84)$$

Visszaírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}' \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}' \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2 \mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x}}{r^5} + \dots \right], \quad (2.85)$$

ahol

$$Q = \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{p} = \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad Q_{ij} = \int d^3 \mathbf{x}' (3x'_i x'_j - \mathbf{x}'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}'), \quad (2.86)$$

a töltés, dipólmomentum illetve kvadrupólmomentum. Ez utóbbi egy 3×3 -as spurtalan tenzor.

- Ha áthelyezem a koordinátarendszer középpontját, akkor $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{c}$ módon kell az integrálok alatt módosítanom, vagyis a fenti együtthatók módosulása:

$$\Delta Q = 0, \quad \Delta \mathbf{p} = Q \mathbf{c}, \quad \Delta Q_{ij} = 3(c_i p_j + c_j p_i) - 2\mathbf{c} \mathbf{p} \delta_{ij} + (3c_i c_j - c^2 \delta_{ij}) Q, \dots \quad (2.87)$$

Általában igaz, hogy a legalacsonyabb multipól momentum koordinátarendszer-független.

- Annak ellenére, hogy egy általános 3×3 -as mátrix komponenseinek száma 9, a kvadrupól tenzornak csak 5 független komponense van, mivel szimmetrikus ($Q_{ij} = Q_{ji}$) és spurtalan ($Q_{ii} = 0$). Vegyük észre azt is, hogy a potenciál kvadrupól része a $Q_{ij}x^i x^j \partial_i \partial_j (r^{-1})$ mennyiséggel arányos, ezért Q antiszimmetrikus része eleve nem is adna járulékot, mert egy szimmetrikus kombinációval van szorozva, Q egységmátrixszal arányos része pedig

$$\Delta \frac{1}{r} = 0$$

miatt nem ad járulékot.

2.3.2. Töltéseloszlás energiája külső térben

Helyezzük most a lokalizált töltéseloszlásunkat egy *külső* potenciálba. A rendszer elektrosztatikus energiája ekkor:

$$W = \int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.88)$$

Ha a potenciál csak lassan változik ott ahol a $\varrho(\mathbf{x}) \neq 0$, akkor sorba fejthetjük:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + \mathbf{x}\nabla\Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots \quad (2.89)$$

Behelyettesítve az elektromos tér definícióját $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x}\mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (2.90)$$

Kihhasználva, hogy a külső források által keltett térre igaz, hogy a beléhelyezett töltéseloszlás helyén $\nabla\mathbf{E} = 0$, az egyenletből kivonhatjuk a $\frac{1}{6}r^2\nabla\mathbf{E}\delta_{ij}$ kifejezést. Így végül:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x}\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (2.91)$$

Ha ezt visszaírjuk (2.88)-be és felhasználjuk (2.86)-t, akkor az energia a következő alakot ölti:

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p}\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (2.92)$$

Ez a kifejtés megmutatja, hogy a multipólus sorfejtés különböző tagjai hogyan hatnak kölcsön egy külső térrel. A töltés a potenciállal, a dipólus az elektromos térrel, a kvadrupólus pedig a térerősség komponensek gradienseivel hat kölcsön.

2.3.3. Két dipólus kölcsönhatási energiája

Legyen most két dipólusunk, \mathbf{p}_1 az \mathbf{x}_1 és \mathbf{p}_2 az \mathbf{x}_2 pontban. (2.92) segítségével könnyen meghatározhatjuk a kettő közötti kölcsönhatási energiát. Tekintsük \mathbf{p}_2 terét a külső térnek, ekkor (2.41) alapján a térerősség \mathbf{x}_1 helyen:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{p}_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - \mathbf{p}_2 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^5}. \quad (2.93)$$

Ha bevezetjük a két dipólust összekötő egyenessel párhuzamos egységvektort $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p}_2\mathbf{n}) - \mathbf{p}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (2.94)$$

Visszaírva az energiára kapott képletbe a két dipólus kölcsönhatási energiája:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1\mathbf{n})(\mathbf{p}_2\mathbf{n})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (2.95)$$

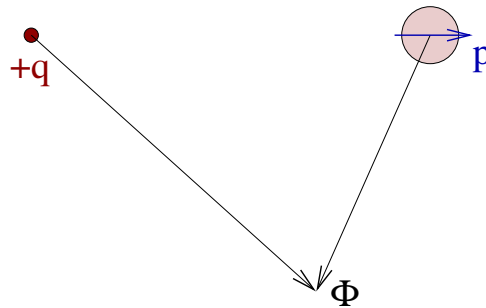
Ez alapján a dipól-dipól kölcsönhatás lehet vonzó vagy taszító, az dipólusok orientációjától függően. Ha a két dipólus közel párhuzamos, akkor amennyiben az összekötő egyenessel párhuzamos az orientációjuk akkor vonzás, ha arra merőleges akkor taszítás lép fel. Egymással közel ellentétes irányba mutató dipólusok esetén pedig ennek éppen a fordítottja igaz.

2.4. Elektrosztatika anyag jelenlétében

2.4.1. Polarizáció, Maxwell-egyenletek

Valódi anyagokban kétfajta viselkedés lehetséges: ha vannak szabad töltéshordozók, akkor sztatikus elektromos tér hatására addig mozognak, ameddig az elektromos tér le nem árnyékolódik. Ha nincsenek szabadon elmozduló töltéshordozók, akkor is vannak elektromos töltések az anyagban, helyhez kötöttek. Ebben az esetben elektromos tér hatására a töltéshordozók csak kicsit mozdulnak el.

Tekintsük az anyag egy kis, nulla össztöltésű anyagdarabkáját. Ennek lehet eleve valamilyen töltésseloszlása, de ha külső elektromos teret alkalmazunk, akkor mindenképpen kialakul egy nem triviális töltésseloszlás, vagyis az anyagdarabka polarizálódik. Fémgömb esetén láttuk (l. (2.79)), hogy egy dipólmomentum alakul ki, de persze a kialakuló töltésseloszlás ennél bonyolultabb is lehet. Ugyanakkor a molekuláris töltésseloszlást makroszkopikus távolságból figyeljük meg, vagyis alkalmazható a multipól-kifejtés. Az anyagdarabka jellemző méretére a -t véve, az n . multipólmomentum a^n -nel arányos, tere r távolságból figyelve a dipól teréhez képest a^{n-1}/r^{n-1} faktorial szorozódik, vagyis messziről figyelve elhanyagolható. Emiatt az anyag kis darabkájának töltésszerkezetét a dipólmomentumával közelíthetjük. Vagyis ha egy ponttöltést és egy kis anyagdarabkát



2.3. ábra. Ponttöltés és dipóllal közelített anyagdarab együttes hatása

nézünk (l. 2.3. ábra), akkor az \mathbf{x} helyen mérhető potenciál:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3}, \quad (2.96)$$

ahol \mathbf{x}_0 a ponttöltés, \mathbf{x}_p az anyagdarabka helye.

Ennek általánosításához egy ponttöltés helyett egy töltéssűrűséggel jellemzett töltésseloszlást helyezünk el, és egy anyagdarabka helyett kiterjedt anyaggal számolunk. Ez utóbbit úgy vesszük figyelembe, hogy felosztjuk elemi dV térfogatú cellákra, amelyeknek valamilyen helyfüggő \mathbf{p} dipólmomentuma van. A töltésseloszlás mintájára bevezethetjük a dipólmomentum-sűrűséget (vagy polarizációs sűrűséget), $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}/dV$ módon.

Ekkor a felosztással nullához tartva integrált kapunk, és a teljes járulék alakja:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.97)$$

A második tagban levő integrált tovább alakítva

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \left[\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \int d^3\mathbf{x}' \nabla' \left[\mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] - \int d^3\mathbf{x}' \nabla' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \int d^2\mathbf{f}_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\nabla' \mathbf{P})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Ezt visszaírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}') - \nabla' \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^2\mathbf{f}_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.99)$$

Vagyis a polarizációból eredő térfogati járulék pontosan olyan alakú, mint a betett töltéssűrűség járuléka. Ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy a teljes érezhető térfogati töltéssűrűség értéke

$$\rho_{tot} = \rho - \nabla \mathbf{P} = \rho + \rho_{pol}. \quad (2.100)$$

A második tagot szokták *polarizációs töltéssűrűségnek* nevezni. A mikroszkopikus kép emögött az, hogy ha megnézzük, hogy egy V térfogatban mekkora töltés helyezkedik el, akkor az általunk betett töltések mellett az anyag töltéssűrűségét is figyelembe kell venni. A térfogat belsejében levő dipólok össztöltése nulla, csak azok maradnak, amelyek a felületen vannak, és így a felük kilóg a térfogatunkból. A dipól felület irányú komponense nulla járulékot ad, vagyis a bent rekedt töltéshez adott járulék a felület \mathbf{n} normálisa irányába mutató komponensből adódik: $qa = -\mathbf{p}\mathbf{n} = -\mathbf{P}\mathbf{n}dV = -a\mathbf{P}\mathbf{n}dA$, azaz $q = -\mathbf{P}\mathbf{n}dA$. A teljes töltés tehát

$$Q = \int_V d^3\mathbf{x} \rho - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{P} = \int_V d^3\mathbf{x} (\rho - \text{div} \mathbf{P}). \quad (2.101)$$

Vagyis az elektromos tér értékét meghatározó Maxwell egyenlet most úgy írható, hogy

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{tot} \Rightarrow \nabla \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.102)$$

Bevezetve a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ mennyiséget (elektromos eltolás), az anyagban érvényes Maxwell-egyenletek alakja

$$\boxed{\nabla \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.} \quad (2.103)$$

A második egyenlet az $\mathbf{E} = -\text{grad} \Phi$ egyenlet következménye. Az első egyenlet értelmezése tehát: ha beteszünk a rendszerbe ρ töltéssűrűséget, akkor az anyag polarizációja miatt a valódi töltéssűrűség *nem* ρ . Az elektromos tér egyenleteibe a teljes töltéssűrűség jön be. A polarizációt figyelembe véve definiálhatjuk a \mathbf{D} elektromos eltolást, ennek forrása már az expliciten betett (külső) töltéssűrűség.

A fenti levezetésben fellépő felületi tag egy $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = P_n$ felületi töltéssűrűségnek felel meg, ami nem jelenik meg a differenciális Maxwell-egyenletben, amit a dielektrikumot határoló felületen kívüli („bulk”) pontokban írunk fel. A következő részben tárgyaljuk a dielektrikumok határán érvényes határfeltételeket, amelyek pontosan ennek hatását veszik figyelembe.

Hogy a fenti egyenleteket kezelni tudjuk, szükségünk van egy $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ összefüggésre. Fémgömbnél láttuk (l. (2.80)), hogy $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \mathbf{E}$. Vagyis ha V térfogatban van egy fémgömb, akkor a polarizáció-sűrűség

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{V} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{4\pi R^3}{V} \right) \mathbf{E}. \quad (2.104)$$

Amennyiben az elektromos térerősség nem túl nagy, akkor a legtöbb anyagban a polarizáció lineárisan függ a térerősségtől:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \boldsymbol{\chi}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (2.105)$$

ahol $\boldsymbol{\chi}$ (elektromos szuszceptibilitás) $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ (relatív permittivitás) illetve $\boldsymbol{\varepsilon}$ (permittivitás vagy dielektromos állandó) szimmetrikus mátrixok, izotróp anyagban azonban ezek arányosak az egységmátrixsal és ilyen módon egyetlen valós skalárral helyettesíthetők.

Teljesen általános anyagi tulajdonságok esetén nem tehetünk mást, mint megpróbáljuk megoldani a

$$\nabla(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \nabla \Phi(\mathbf{x})) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (2.106)$$

egyenletet. Homogén, izotróp anyagban a potenciálra felírható

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.107)$$

Ugyanaz az egyenlet mint vákuumban, csak a permittivitás értéke más. Részlegesen homogén közegekben a homogén tartományokban alkalmazhatjuk a fenti képletet, a közegethatárokon határfeltételeket szabhatunk.

2.4.2. Határfeltételek

Közegethatáron a határfelületen dA alapú $d\ell$ magasságú henger felületére integrálva, ahol $d\ell \rightarrow 0$, a felületre rakott szabad töltést kapjuk. Feltéve, hogy ilyen nincsen, kapjuk:

$$\int_V \operatorname{div} D = 0 = dA(D_{2n} - D_{1n}) \Rightarrow \boxed{D_{1n} = D_{2n}}. \quad (2.108)$$

Ennek fizikai jelentése az, hogy inhomogén anyagban töltéeloszlás indukálódik. Két homogén anyag határán (szabad töltések távollétében) is polarizációs felületi töltéssűrűség alakul ki, hiszen a felülethez közel, a felületet a $z = 0$ síkban fektetve:

$$\rho_{pol} = -\partial_i P_i = -\partial_i [P_{2i} \Theta(z) + P_{1i} \Theta(-z)] = (P_{1z} - P_{2z}) \delta(z) \Rightarrow \sigma = P_{1z} - P_{2z}. \quad (2.109)$$

Másképp végiggondolva ez ugyanaz, mint az előző szakaszban kapott felületi járulékok. Általában véve a felületi töltéssűrűség a polarizáció normális vetületének ugrásával egyenlő. Mivel az elektromos térerősség normális vetületének ugrása a felületi töltéssűrűséggel egyenlő

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = P_{1n} - P_{2n} \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}, \quad (2.110)$$

ami ugyanaz, mint (2.108).

A másik határfeltétel onnan jön, hogy a felületet körbeölelő, a \mathbf{t} érintővektor irányában álló $d\ell$ magasságú és dh hosszúságú téglalapra integrálom $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ -t, miközben $d\ell \rightarrow 0$:

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 = dh \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Rightarrow \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_1. \quad (2.111)$$

Mivel ez minden \mathbf{t} érintővektorra fennáll, ezért a térerősség érintőirányú (tangenciális) komponense folytonos a határon:

$$\boxed{\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}}. \quad (2.112)$$

A határfeltételeket a potenciálra megfogalmazva: ha a potenciál mindenütt értelmezett, akkor a térerősség végeességéből a potenciál folytonossága következik. E_n ugrása a felületre merőleges derivált ugrását jelenti:

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1}. \quad (2.113)$$

Vagyis részben folytonos közegeknél

$$\boxed{\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{és a felületeken } \Phi \text{ és } \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial n} \text{ folytonos.}} \quad (2.114)$$

Mivel itt is a Poisson egyenlet megoldását keressük, ugyanazok a módszerek alkalmazhatók, mint a fémek esetében.

Megjegyzés: ha $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned} D_{2n} = D_{1n} &\Rightarrow E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{a határon a felület belseje felől} \\ &\Rightarrow \Phi|_{\text{belül}} = \text{konst.} \Rightarrow \mathbf{E}|_{\text{belül}} = 0, \quad \Phi|_{\text{határon}} = \text{konst.} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Ez felel meg a fémeknek.

2.4.3. Dielektromos gömb külső térben

Ha a $\Delta\Phi = 0$ egyenlet megoldását keressük, akkor a korábban látott megoldásokat használhatjuk különböző szimmetriájú rendszerekben.

Feladat: Dielektromos gömb külső térbe helyezve: vegyünk egy R sugarú gömböt ε_b permittivitással, kívül ε_k permittivitású anyag legyen. Alkalmazzunk \mathbf{E}_0 külső elektromos teret. Milyen lesz az elektromos térerősség a rendszerben?

Megoldás: A megoldandó egyenletek, ha a külső elektromos tér z irányú:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_b = 0, \quad \Delta\Phi_k = 0, \quad \Phi_b(r = R) = \Phi_k(r = R), \quad \varepsilon_b \frac{\partial\Phi_b}{\partial r} \Big|_{(r=R)} = \varepsilon_k \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} \Big|_{(r=R)}, \\ \Phi_k(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta, \quad \Phi_b(r \rightarrow 0) = \text{véges.} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Miután a határfeltételek φ -függetlenek, kereshetjük a megoldást is φ -független alakban. (2.80) alapján megsejthetjük, hogy a megoldásban most is szerepelni fog egy dipólus tag. Ha a (2.40) összefüggést átírjuk gömbi koordinátarendszerre:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad (2.117)$$

Ezek alapján keressük a megoldást a következő alakban:

$$\Phi_k = -E_0 r \cos\theta + B \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad \Phi_b = C r \cos\theta + D \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (2.118)$$

Alkalmazzuk a határfeltételeket:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \quad \Phi_b = \frac{D}{r^2} \cos\theta = \text{véges} &\Rightarrow D = 0 \\ r = R: \quad -E_0 R + \frac{B}{R^2} = C R \\ r = R: \quad \varepsilon_k (-E_0 - 2 \frac{B_1}{R^3}) = \varepsilon_b C. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Innen kapjuk

$$C = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} E_0, \quad B = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} E_0 R^3. \quad (2.120)$$

Ezzel felírva a megoldások

$$\Phi_k = -\mathbf{E}_0 \mathbf{x} \left(1 - \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \Phi_b = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} \mathbf{E}_0 \mathbf{x}. \quad (2.121)$$

A megfelelő térerősségek:

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_0 + \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} R^3 \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{E}_0 \mathbf{x}) - \mathbf{E}_0 r^2}{r^5}, \quad \mathbf{E}_b = \frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} \mathbf{E}_0. \quad (2.122)$$

A gömbön kívül a megoldás a külső tér mellett egy dipól tere, ahol a dipól erőssége

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} R^3 \mathbf{E}_0 = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_k}. \quad (2.123)$$

Mivel belül homogén tér alakul ki, ezt leosztva a gömb térfogatával megkaphatjuk a polarizációs sűrűséget is:

$$\mathbf{P} = \frac{3\mathbf{p}}{4\pi R^3} = \varepsilon_k \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_0. \quad (2.124)$$

Fém esetén $\varepsilon_b \rightarrow \infty$, azaz $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_k R^3 \mathbf{E}_0$, összhangban korábbi eredményeinkkel. Ha $\varepsilon_k > \varepsilon_b$, vagyis a külső térben jobban polarizálható anyag van, akkor \mathbf{p} ellentétes \mathbf{E}_0 -lal. Speciális eset, ha kívül vákuum van, belül pedig anyag, ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_0$.

Belül a térerősség homogén, azonban nagysága eltér az alkalmazott homogén külső tértől. A polarizáció hatására létrejövő egyenletes tér nagysága

$$\mathbf{E}_{pol} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_b}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{3\varepsilon_k} \mathbf{P}. \quad (2.125)$$

Ha tehát kívül jobban polarizálható anyag található, akkor \mathbf{E}_{pol} növeli a külső teret, ha belül van jobban polarizálható anyag, akkor csökkenti azt.

A felületen ($r = R$ -nél) a térerősségek különbsége a felületre merőleges, nagysága a felületi töltéssűrűség:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{3(\varepsilon_b - \varepsilon_k)}{2\varepsilon_k + \varepsilon_b} (\hat{\mathbf{x}} \mathbf{E}_0). \quad (2.126)$$

Innen az látszik, hogy ha $\varepsilon_b > \varepsilon_k$, akkor a tér irányában pozitív töltések halmozódnak fel, ellenkező esetben negatív töltések.

2.4.4. Elektrosztatikus energia dielektrikumban

Először rögzítsük a dielektrikumot. Induljunk ki abból, hogy $\delta\rho$ extra külső töltés adott potenciálba végtelenből történő behozatalához szükséges energia

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.127)$$

A behozott töltés miatt az anyag kissé át polarizálódik:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div}(\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}) = \rho + \delta\rho \Rightarrow \delta\rho = \operatorname{div} \delta\mathbf{D}. \quad (2.128)$$

Ezt visszaírva, és felhasználva, hogy $\Phi(\infty) = 0$:

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \operatorname{div}(\delta\mathbf{D})\Phi = - \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{D} \operatorname{grad} \Phi = \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (2.129)$$

Amennyiben az anyag lineáris, azaz $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, akkor a fenti alak felintegrálható:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \mathbf{E} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (2.130)$$

Egy hasonló gondolatmenettel azt is mondhattuk volna, hogy mikor kívülről behozok egy töltést, valójában az anyagot is át-polarizálom, vagyis összesen $\rho_{tot} = \rho + \rho_{pol}$ töltést viszek a rendszerbe. Ennek forrása már \mathbf{E} , vagyis ekkor a fenti gondolatmenet a szokásos vákuum formulát adja.

A kettő gondolatmenet közötti különbség az anyag polarizációs járuléka

$$\int d^3\mathbf{x} \delta \rho_{pol} \Phi = - \int d^3\mathbf{x} \operatorname{div}(\delta \mathbf{P}) \Phi = \int d^3\mathbf{x} \delta \mathbf{P} \operatorname{grad} \Phi = - \int d^3\mathbf{x} \delta \mathbf{P} \mathbf{E}. \quad (2.131)$$

Kérdés, hogy ez az energia honnan származik.

Mikroszkopikusan lineáris anyag képzelhető négyzetes potenciállal kötött töltéshordozóknak. A rugóban tárolt potenciális energia:

$$q\mathbf{E} = D\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{q^2 \mathbf{E}}{D} \Rightarrow \frac{1}{2} D \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 \mathbf{E}^2}{D} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}. \quad (2.132)$$

Ha a dipólok eloszlását folytonosnak vesszük, akkor a rugók potenciális energiája és az elektromos tér energiája összesen

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (2.133)$$

2.4.5. Változó dielektrikum

Állandó töltések, változó dielektrikum

Változtassuk a dielektrikumot állandó külső töltéseloszlás mellett. Induljunk dielektrikum nélküli állapotból, ekkor legyen a térerősség \mathbf{E}_0 , az elektromos eltolás $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$. A dielektrikum jelenlétében ezek megváltoznak \mathbf{E} illetve \mathbf{D} értékre. Számítsuk ki a különbséget!

A kiinduló képletben most csak a dielektrikum energiáját akarom számolni, azaz le kell vonnom azt a potenciál járulékot, amely a dielektrikum nélkül lenne jelen:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} \delta \rho(\mathbf{x}) (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_0(\mathbf{x})). \quad (2.134)$$

Most a fixált töltéseloszlást kétféle módon írhatom, mivel $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}_0$. Használjuk a következő alakot:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} [\Phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D}_0 - \Phi_0 \operatorname{div} \delta \mathbf{D}] = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{E} \delta \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{D}]. \quad (2.135)$$

Lineáris anyagban $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, illetve $\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{P}$, ezért

$$\delta W' = - \int d^3\mathbf{x} \delta \mathbf{P} \mathbf{E}_0 \Rightarrow W' = - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{E}_0, \quad \delta w' = - \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{E}_0. \quad (2.136)$$

Állandó potenciál, változó dielektrikum

Azt is megtehetjük, hogy a rendszer töltéseit külső potenciállal rögzítem. Ekkor a fenti gondolatmenet annyiban módosul, hogy most a töltések mind a potenciállal rögzített felületre kerülnek, viszont más töltést kell az anyag jelenlétében felvinni, mint anélkül, mert a potenciálokat kell fixen tartani:

$$\delta W'' = \int d^3\mathbf{x} (\delta \rho \Phi - \delta \rho_0 \Phi_0) = \oint d^2x (\delta \sigma \Phi - \delta \sigma_0 \Phi_0). \quad (2.137)$$

Mivel a felületen a potenciálok nem változnak, ezért ott $\Phi = \Phi_0$, illetve tetszőlegesen cserélgethetjük őket. A hasznos kombináció most

$$\delta W'' = \oint d^2x (\delta\sigma\Phi_0 - \delta\sigma_0\Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta\rho\Phi_0 - \delta\rho_0\Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta\mathbf{D}\mathbf{E}_0 - \delta\mathbf{D}_0\mathbf{E}). \quad (2.138)$$

Láthatóan most pontosan (2.135) mínusz egyszeresét kaptuk:

$$\delta W'' = -\delta W' \Rightarrow W'' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P}\mathbf{E}_0, \quad \delta w'' = \frac{1}{2} \mathbf{P}\mathbf{E}_0. \quad (2.139)$$

A különbség oka az, hogy mást tekintek a két esetben anyag nélküli rendszernek, vagyis a referenciapont különbözik. Ha pl. a fix töltéseket nézem, ahhoz képest a fix potenciálnál töltéseket kell mozgatnom, hogy a potenciálok ne változzanak, ez pedig munkavégzést jelent.

Érdekesség: A fenti két gondolatmenet illeszkedik a termodinamikai leírásba: definiálhatjuk a rögzített töltések melletti energiát, infinitezimális alakjában

$$dE = -pdV + TdS - \mathbf{E}_0 d\mathbf{P}. \quad (2.140)$$

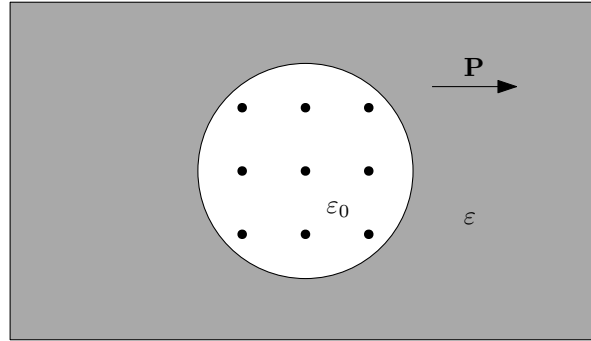
Ha a potenciált rögzítem, akkor Legendre-transzformációt kell végeznem. Ekkor egy szabad energia jellegű mennyiséget kapunk

$$\mathcal{F} = E + \mathbf{P}\mathbf{E}_0 \Rightarrow d\mathcal{F} = -pdV + TdS + \mathbf{P}d\mathbf{E}_0. \quad (2.141)$$

2.4.6. Clausius-Mossotti-egyenlet

A korábban látott külső térbe helyezett dielektromos gömb megoldására építhetünk anyagmodellt is. Mikroszkopikusan az atomi (molekuláris) polarizálhatóság kiszámítható, arányos a elektromos térrel. Sűrű anyagban a makroszkopikus tér mellett megjelenik egy a közeli molekulák által létrehozott belső tér is $\mathbf{E}_{\text{közeli}}$, ami átveszi a folytonos anyagként közelített távolabbi molekulák \mathbf{P} polarizációjából származó \mathbf{E}_P tér helyét:

$$\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{közeli}} - \mathbf{E}_P. \quad (2.142)$$



2.4. ábra. Dielektrikumot alkotó molekula környezete dielektromos gömbként közelítve.

Megmutatható, hogy egyszerű köbös rács, illetve teljesen véletlenszerű anyag esetén a szimmetria miatt $\mathbf{E}_{\text{közeli}} = 0$. Ekkor az anyagdarabkát úgy is felfoghatjuk, mintha szét lenne kenve arra a térrészre, amelyben a fenti molekula/atom található. Gömbnek tekintve a szétkentséget a (2.123) megoldásából tudjuk a polarizáció nagyságát. E kettő leírás konzisztenciájából következik:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \gamma \mathbf{E} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E} \Rightarrow \gamma = 3V \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}. \quad (2.143)$$

Bevezetve a $n = 1/V$ molekulásűrűséget:

$$\gamma = \frac{3}{n} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}, \quad \varepsilon_r = \frac{3 + 2n\gamma}{3 - n\gamma}, \quad \chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{n\gamma}{1 - \frac{n\gamma}{3}}. \quad (2.144)$$

Ez a *Clausius-Mosotti* egyenlet. Akkor ad jó eredményt, ha az anyagnak a töltésszerkezete teljes mértékben a polarizáció hatására alakul ki.

Hogy γ -t megkapjuk, mikroszkopikus leírásra van szükség. Legegyszerűbb modell, ha a töltéshordozót (elektront) harmonikus potenciállal kötöttnek képzeljük. Ekkor \mathbf{E}_0 térerősség hatására történő elmozdulás \mathbf{x} értéke

$$D\mathbf{x} = q\mathbf{E}_0 \Rightarrow \mathbf{p} = q\mathbf{x} = \frac{e^2}{D}\mathbf{E}_0 \Rightarrow \gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 D}. \quad (2.145)$$

A rugóállandó helyett a rezgési frekvenciával is kifejezhetjük a mikroszkopikus polarizálhatóságot: $\omega^2 = D/m$ miatt

$$\gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \omega^2 m}. \quad (2.146)$$

Ha több töltéshordozó, illetve több sajátfrekvencia is van, akkor

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i^2}{\omega_i^2 m_i}. \quad (2.147)$$

3. fejezet

Magnetosztatika

3.1. Magnetosztatika alapjai

3.1.1. Elektromos áram

Az előző fejezetben sztatikus töltésrendszerekkel és azok elektromos terével foglalkoztunk, most térjünk át a magnetosztatikára és a forrásaként szolgáló időben állandó sebességgel áramló töltésekre. A töltések áramlását egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sebességmezővel vehetjük figyelembe, vagyis \mathbf{x} helyen levő elemi dV cellában a töltések átlagsebessége $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Ha a töltést is belevesszük, akkor beszélünk áramsűrűségről: $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, amely szintén egy vektormező.

Ha felvesszünk egy $d\mathbf{f}$ felületelemet, azon mennyi töltés áramlik át egységnyi idő alatt? Ha az adott pontban a mozgó töltések felületre merőleges komponense v_{\perp} , akkor azok a töltések jutnak át, amelyek $dV = v_{\perp} dt d\mathbf{f}$ térfogatú dobozban vannak, ezek össztöltése $dq = dV \rho$. Tehát az időegység alatt átfolyó töltések száma, tekintetbe véve, hogy $v_{\perp} d\mathbf{f} = \mathbf{v} d\mathbf{f}$:

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\text{átfolyó}} = \mathbf{J} d\mathbf{f}. \quad (3.1)$$

Ha a töltések egy hosszú vezetőben haladnak, akkor áramerősség a vezető teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt átfolyó töltés. A fentiek miatt

$$I = \int d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

SI egysége az amper $1A = 1C/s$. Ha vékony vezetőt nézünk, akkor a fenti képlet miatt

$$dV \mathbf{J} \rightarrow Ids. \quad (3.3)$$

Ha egy zárt térfogatelemet veszünk, akkor a teljes felületén kiáramló töltés egyenlő a belül levő töltések fogyásával, ha nincs a töltésnek forrása, azaz a töltés megmaradó mennyiség. Azaz:

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = 0. \quad (3.4)$$

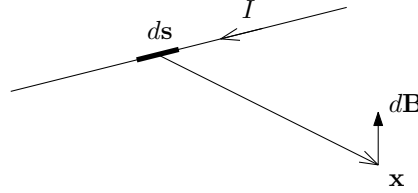
Ez a töltésmegmaradás mérlegegyenlete. Magnetosztatikában $\dot{\rho} = 0$, azaz $\text{div} \mathbf{J} = 0$.

3.1.2. Biot-Savart törvény

1819-ben Oersted megfigyelte, hogy áram járta vezetők elmozdulást okoztak a közelükbe helyezett iránytűkben, vagyis az elektromos áram és a mágnesség között szoros kapcsolat van. Elsőként Biot és Savart (1820), majd

később Ampère (1820-1825) jóval alaposabb kísérletekkel meghatározta az alapvető kísérleti törvényt ami összeköti a mágneses indukció \mathbf{B} -t és az áramot. Ez a *Biot-Savart törvény*:

$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (3.5)$$



3.1. ábra. Áram járta vezető által keltett mágneses indukció.

A k arányossági tényező SI-ben $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$, μ_0 a vákuumpermeabilitás. A \mathbf{B} mértékegysége a tesla (T). Ránézésre ez a törvény hasonlít a Coulomb-törvényre, azonban nagyon fontos eltérések vannak a kettő között. Egyrészt a vektoriális jellegük jelentősen eltér a vektoriális szorzásnak köszönhetően.

Másrészt bár úgy tűnhet, hogy $I ds$ a q töltés analógiájára az áramelem, ez egy hibás kép. (3.5)-nek csupán egy összegzés tagjaként van fizikai jelentése, mivel egy áramelem önmagában nem teljesíti a töltésmegmaradást – az elején töltés keletkezik, a végén pedig a töltés eltűnik. A korrekt összefüggés vékony vezetőre, illetve kiterjedt áramsűrűsége:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (3.6)$$

Ampère kísérleteiben nem közvetlenül a mágneses indukció és a áramok közötti kapcsolat meghatározásával foglalkozott, hanem egy áram járta vezeték által egy másikra kifejtett erővel:

$$d\mathbf{F} = I_1 d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2 \quad (3.7)$$

Ennek vizsgálata az áramelemek koncepciójának egy újabb problémájára világít rá. Ha felírjuk két áramelem között fellépő erőt

$$d^2\mathbf{F} = I_1 d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 d\mathbf{s}_1 \times (d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (3.8)$$

Azonban a vektoriális szorzás azonossága miatt

$$\frac{d\mathbf{s}_1 \times (d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} = -(d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} + d\mathbf{s}_2 \frac{d\mathbf{s}_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (3.9)$$

Itt az első tag konzisztens Newton harmadik törvényével, a hatás-ellenhatással, a második viszont nem. Ha azonban nem áramelemeket, hanem zárt vagy végtelenbe tartó vezetőket nézünk:

$$\oint \frac{d\mathbf{s}_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} = - \oint \nabla_1 \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} d\mathbf{s}_1 = 0, \quad (3.10)$$

mivel egy teljes gradiens zárt hurokra vett integrálja zérus. Így két vezető hurok között fellépő erő

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 \quad (3.11)$$

ami eleget tesz a hatás-ellenhatás törvényének.

3.1.3. Vektorpotenciál, Maxwell 3. és 4. egyenlete

Ismét használhatjuk, hogy $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ gradiensként áll elő

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.12)$$

Emiatt

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.} \quad (3.13)$$

A bevezetett \mathbf{A} mennyiség a vektorpotenciál. Ha vékony vezetők van, akkor

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|}} \quad (3.14)$$

Miután \mathbf{B} rotációként áll elő:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0,} \quad (3.15)$$

az a harmadik Maxwell törvény.

Számoljuk ki \mathbf{B} rotációját

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \Delta A_i. \quad (3.16)$$

Innen az első tag

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \partial_i J_i(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0 \quad (3.17)$$

kihasználva, hogy sztatikában $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Itt eldobtunk egy felületi integrált, mivel véges térfogatban lokalizált árameloszlást feltételezve $\mathbf{J}(\infty) = 0$. Ugyanakkor

$$\Delta A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') (-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = -\mu_0 J_i(\mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Összegezve tehát

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.} \quad (3.19)$$

Ez a negyedik Maxwell törvény (sztatikára). Egy F felületre integrálva

$$\int_F d\mathbf{f} \text{rot } \mathbf{B} = \oint_{\partial F} ds \mathbf{B} = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} = \mu_0 I_F \Rightarrow \boxed{\mu_0 I_F = \oint_{\partial F} ds \mathbf{B},} \quad (3.20)$$

ahol I_F a felületen átfolyó áramerősség. Ez az Ampère-féle gerjesztési törvény.

3.1.4. Mértékinvariancia

Ugyanúgy mint a skalárpotenciál esetén, a \mathbf{A} tér nem fizikai mennyiség. Mivel $\text{rot grad } \Psi = 0$, egy skalármező gradiensként hozzáadhatjuk \mathbf{A} -hoz, és még mindig ugyanazt a mágneses indukciót kapjuk:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Psi. \quad (3.21)$$

Ezt az elektrodinamika *mértékszabadságának* (vagy mértékinvarianciájának) hívjuk.

Hogy számolni tudjunk, rögzíteni kell Ψ -t (mértékrögzítés). A fenti számolásban, ahogy láttuk $\text{div } \mathbf{A} = 0$ feltételünk volt, az a Coulomb mérték. Elméletben ez csupán azt a feltételt írja elő, hogy $\Delta \Psi = 0$, azonban ha figyelembe vesszük az aszimptotikát is és végtelenben $\mathbf{A} = 0$ szeretnénk, akkor csak a $\Psi = 0$ választás lehetséges, mivel végtelen térre a Laplace-egyenletnek korlátos megoldása csak konstans lehet.

3.2. Multipólus kifejtés a magnetosztatikában

3.2.1. Lokalizált árameloszlás mágneses tere

Feladat: Végtelen hosszú, végtelenül vékony, egyenes vezetőben I áram folyik. Mekkora a mágneses indukció?

Megoldás: A rendszer hengersizmetriája miatt nem függhet semmi φ -tól hengerkoordinátarendszerben felírva. \mathbf{B} iránya tisztán \hat{e}_φ , ezért alkalmazható az Ampère törvény a vezetőt körülölelő r sugarú körre

$$\oint d\mathbf{s}\mathbf{B} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3.22)$$

Feladat: Adott egy R sugarú vékony kör alakú vezető, amelyben I áram folyik. Mekkora az általa létrehozott mágneses indukció?

Megoldás: A vektorpotenciálját számoljuk ki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|} \quad (3.23)$$

A kört paraméterezni kell

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi' \\ R \sin \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi'. \quad (3.24)$$

Írjuk fel \mathbf{x} -et hengerkoordinátákban

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{s}'| = \sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (3.25)$$

Emiatt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Írjuk fel a vektorpotenciált hengerkoordinátákban; az egy hosszúságúra normált bázisvektorok:

$$\hat{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

emiatt

$$A_\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_\varrho = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{-\sin(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} = 0, \quad A_z(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_z = 0, \quad (3.28)$$

ami nem nulla

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}}. \quad (3.29)$$

A_φ nem függ φ -től, ami a feladat hengerszimmetriájából következik. Descartes koordinátákban az azimuttszög-függés kizárólag a bázisvektorok helyfüggéséből adódik.

Az integrál megadható elliptikus függvények segítségével, vagy numerikusan is számolható. Minket az érdekel most, hogy milyen lesz a tér nagy távolságokra? Ekkor $r^2 = \varrho^2 + z^2$ jelöléssel $r \gg R$, emiatt

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{1}{r} - \frac{u^2}{2r^3} + \dots \quad (3.30)$$

Most $u^2 = R^2 - 2\varrho R \cos \varphi$, azaz

$$A_\varphi(\varrho, z) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' R \cos \varphi' \left[\frac{1}{r} + \frac{2\varrho R \cos \varphi' - R^2}{2r^3} + \dots \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I \varrho}{r^3} + \dots, \quad (3.31)$$

hiszen az első tag nem ad járulékot. Mivel most

$$\hat{e}_z \times \mathbf{x} = \hat{e}_z \times (z\hat{e}_z + \varrho\hat{e}_r) = \varrho\hat{e}_\varphi, \quad (3.32)$$

ezért a fenti eredmény úgy írható, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \text{ahol } \mathbf{m} = R^2 \pi I \hat{e}_z. \quad (3.33)$$

3.2.2. Multipólus kifejtés, mágneses dipólus, giromágneses faktor

A fenti feladat általánosítható tetszőleges áramhurok terének nagy távolságú viselkedésére, ami a magnetostatika multipólus kifejtéséhez vezet:

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{J_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{x_j x'_j}{r^3} + \dots \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') x'_j + \dots \quad (3.34)$$

Az első illetve a második tag együtthatója (a végtelen felületre vett integrálokat eldobjuk, mert ott $\mathbf{J} = 0$, valamint kihasználjuk, hogy $\text{div } \mathbf{J} = 0$)

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} J_i &= \int d^3 \mathbf{x} (\partial_j x_i) J_j = - \int d^3 \mathbf{x} x_i \text{div } \mathbf{J} = 0 \\ \int d^3 \mathbf{x} x_j J_i &= \int d^3 \mathbf{x} x_j (\partial_k x_i) J_k = - \int d^3 \mathbf{x} x_i \partial_k (x_j J_k) = - \int d^3 \mathbf{x} (x_i J_j - x_i x_j \text{div } \mathbf{J}) = - \int d^3 \mathbf{x} x_i J_j \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ezért a sorfejtés első tagja hiányzik, amit a mágneses monopólusok hiányaként értelmezhetünk¹. A második tag egy antiszimmetrikus mátrix; ehhez hozzárendelhetünk egy vektort, amit *mágneses dipólmomentumnak* hívunk:

$$\int d^3 \mathbf{x} x_j J_i = \varepsilon_{jik} m_k \quad \text{vagyis} \quad m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3 \mathbf{x} x_j J_k, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{x} \times \mathbf{J}}. \quad (3.36)$$

Emiatt végül:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \dots} \quad (3.37)$$

¹Vigyázat! Időfüggés esetén megmarad ez a tag, ami a mágneses dipólsugárázshoz vezet. l. később.

Mágneses dipól indukciója:

$$B_i = (\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\varepsilon_{kln} m_\ell x_n}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \frac{m_\ell \delta_{jn} r^2 - 3m_\ell x_j x_n}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x_i(\mathbf{m}\mathbf{x}) - m_i r^2}{r^5}, \quad (3.38)$$

ugyanaz a képlet mint az elektromos dipól esetében.

Megjegyzések a mágneses dipólmomentummal kapcsolatban:

- Vezető hurok esetén, a Stokes tétel miatt:

$$m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} x_j J_k = \frac{I}{2} \oint ds_k (\varepsilon_{ijk} x_j) = \frac{I}{2} \int_F df_k \varepsilon_{kln} \partial_\ell (\varepsilon_{ijn} x_j) = \frac{I}{2} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{iln} \int_F df_k = I \int_F df_i, \quad (3.39)$$

vagyis a mágneses dipólmomentum $\mathbf{m} = I\mathbf{F}$ az áramhurok felületével arányos.

- töltött részecske mozgása esetén

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \quad (3.40)$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a részecske trajektóriája. Ekkor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times [q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})] = \frac{q}{2m} \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L}, \quad (3.41)$$

ahol \mathbf{L} a részecske impulzusmomentuma (perdülete). Vagyis a mágneses dipólmomentum a perdülettel arányos lesz. Az arányossági tényező a giromágneses faktor γ . A fenti egyenletből $\gamma = q/(2m)$.

Ez az összefüggés igaz lesz atomi méretekig. Saját impulzusmomentummal (spinnel) rendelkező elemi részecskék esetében már van egy faktor a fenti eredmény előtt:

$$\mathbf{m} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \quad (3.42)$$

g a giromágneses faktor (Landé-faktor vagy g -faktor). Elektronra $g_e = 2.002319\dots$: $g = 2$ jön az elektronok Dirac-egyenletéből, a járulékos $0.002319\dots$ faktor a kvantumelektrodinamika eredménye.

- A fenti tétel általánosítása forgó, töltött merev testre: itt $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, azaz $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$. Emiatt

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \right] \boldsymbol{\omega} = \frac{Q}{2M} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.43)$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, ha a tömegeloszlására $\rho_m = \rho M/Q$ -t veszünk.

3.2.3. Erő és forgatónyomaték

A (3.7) kifejezés integrális alakja folytonos árameloszlásra is átírható

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (3.44)$$

illetve ha ebbe beírjuk egy mozgó töltés áramsűrűségét $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})$, akkor megkapjuk a *Lorentz-erőt*:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.45)$$

Ha közel homogén külső térbe árameloszlást helyezünk, akkor a mágneses indukció sorba fejthető:

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + x_j \partial_j B_i(0) + \dots \quad (3.46)$$

Ezzel

$$F_i = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} J_j(\mathbf{x}) (B_k(0) + x_\ell \partial_\ell B_k(0) + \dots). \quad (3.47)$$

Korábban már láttuk, hogy az első tag nulla, a másodikban pedig

$$\int d^3\mathbf{x} x_\ell J_j(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\ell j n} m_n. \quad (3.48)$$

Ezzel $\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jnl} = \delta_{kn}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{in}$ miatt

$$F_i = (\delta_{kn}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{in})m_n \partial_\ell B_k = m_k \partial_i B_k - m_i \partial_i B_i \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\mathbf{B}), \quad (3.49)$$

mivel $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Vagyis a dipólt a mágneses indukció deriváltja mozgatja!

A fenti erő írható potenciál gradienseként

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad U = -\mathbf{m}\mathbf{B}. \quad (3.50)$$

Ez az U tehát a külső térbe helyezett mágneses dipól energiája.

A forgatónyomaték kifejezése:

$$N_i = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))]_i = \int d^3\mathbf{x} (J_i(\mathbf{x})x_j B_j(x) - B_i(\mathbf{x})x_j J_j(\mathbf{x})) \rightarrow \varepsilon_{jil} m_\ell B_j \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (3.51)$$

A fentiek fényében elemezhetjük, mit is csinál egy kis mágnes egy másik, rögzített mágnes mellett. Mindkét mágneset közelítsük dipóllal, \mathbf{m} illetve \mathbf{m}_0 dipólmomentummal. Ha \mathbf{m} nem párhuzamos a lokális mágneses indukcióval, akkor olyan forgatónyomaték hat rá, amely a mágneses indukció irányába forgatja, összhangban azzal, hogy ekkor a dipól energiája ($-\mathbf{m}\mathbf{B}$) csökken – vagyis a két dipól ellentétes pólusával fordul egymás felé. Ezek után, mivel a mágneses indukció csökken a távolsággal, $-\mathbf{m}\mathbf{B}$ nő a távolsággal, gradiense tehát kifelé mutat, negatív gradiense pedig befelé. Vagyis a nagy mágnes magához vonzza a kicsit.

Ugyanezen ok miatt egymás mellé helyezett dipólok szintén ellentétes pólusaikkal fordulnak egymás felé, vagyis csökkentik egymás terét. Vagyis tisztán magnetosztatikai erők az antiferromágneses rendeződést részesítik előnyben (l. később).

3.3. Magnetosztatika anyagban

3.3.1. Mágnesezettség

Hasonlóan az elektrosztatikához, anyag jelenlétében a makroszkopikus árameloszlások csak egy részét képezik a teljes árameloszlásnak. Kis méretű, lokalizált árameloszlások képződhetnek az anyagban. Ezek által létrehozott mágneses indukció, a méretéhez képest nagy távolságra, mint láttuk, mágneses dipóllal írható le: a magasabb multipól momentumok járuléka a/r hatványaival van elnyomva, ahol a az árameloszlás jellemző mérete, r a megfigyelési pont távolsága. Másik lehetőség az, hogy az anyagban eleve vannak olyan mágnesesen aktív elemi összetevők, amelyek szintén a dipólmomentumukkal jellemezhetők nagy távolságon.

Emiatt az anyag jelenlétét itt is, mint elektrosztatikában, mágneses dipólsűrűséggel (mágnesezettség) jellemezhetjük: $d\mathbf{m} = dV \mathbf{M}(\mathbf{x})$. A teljes tér tehát

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right], \quad (3.52)$$

ahol az első tag a kívülről betett árameloszlás, a második tag a mágneses dipólsűrűség járuléka.

A második tag komponenseit kifejtve:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (-\partial_k) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') \partial'_k \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\ &= \{\text{parc. int.}\} = \int d^3\mathbf{x}' \frac{-\varepsilon_{ijk} \partial'_k M_j(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}'))_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ahol egyszerűség kedvéért elhagytuk a felületi tagot (a dielektrikum esetéhez hasonlóan ez egy $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{M}$ felületi áramsűrűséghez vezet, amit a határfeltételekben veszünk figyelembe, ld. a 3.3.4 szakaszt). Tehát a mágneses dipólsűrűség ugyanúgy a külső áramokhoz ad járulékot, mint az elektrosztatikában a dipólsűrűség a külső töltéssűrűséghez:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mikr}, \quad \mathbf{J}_{mikr} = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (3.54)$$

Figyeljük meg, hogy itt pozitív előjellel jön a mikroszkopikus járulék! A fizikai kép emögött az, hogy ha egy F felületen átfolyó áramot akarjuk kiszámítani, akkor egyrészt figyelembe kell venni a makroszkopikus áramsűrűséget, valamint a mikroszkopikus áramokat, ezeket $\mathbf{m} = \mathbf{n} I_{mikr} dA$ mágneses dipólmomentumokkal jellemezzük. Miután a mikroszkopikus áramok kis méretű köráramok, így a felület belsejében nulla teljes átfolyó töltést eredményeznek. A felület határán is csak a határvonal irányú ($\hat{\mathbf{s}}$) komponens ad járulékot: azaz a járulékos áramerősség: $I_{mikr} \mathbf{n} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{m} \hat{\mathbf{s}} / dA = \mathbf{M} \hat{\mathbf{s}} dV / dA = \mathbf{M} d\mathbf{s}$. Vagyis a teljes áram

$$I_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J}_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} + \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{M} = \int_F d\mathbf{f} (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}). \quad (3.55)$$

3.3.2. Maxwell-egyenletek

A lokális törvények \mathbf{J}_{tot} -ra vonatkoznak, vagyis:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{tot} = \mu_0 (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}) \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Az Ampère törvényt a (3.20) képlettel analóg módon kapjuk

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{H} = I. \quad (3.57)$$

\mathbf{H} neve mágneses tér, és (bár a neve mást sugall), csak egy segédmenyiség – az erőhatások csak \mathbf{B} -ből jönnek. Ennek ellenére sokszor a mágneses tér segítségével fejezik ki a megoldást: vákuumban csak egy konstans különbség van a kettő között, és a mágneses tér az egyenletekben hasonló szerepet játszik, mint az elektrodinamika egyenleteiben az \mathbf{E} .

Hogy meg tudjuk oldani a fenti egyenleteket, kell egy $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ reláció. Ez sokszor nagyon bonyolult, mert az anyag elemi mágneses összetevőinek kölcsönhatása sokszor összemérhető a mágneses tér energiájával, sőt, meg is haladhatja azt. Az anyag mágneses tulajdonságait ezért elsősorban a mikrofizikai jelenségek határozzák meg.

3.3.3. Lineáris és nemlineáris anyagok

- **dia- és paramágneses anyagok:** az anyagok bizonyos fajtáinál lineárisan függ a mágnesezettség illetve a mágneses tér a mágneses indukciótól; izotrop esetben:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r = 1 + \chi, \quad (3.58)$$

χ a mágneses szuszceptibilitás, μ illetve μ_r az anyag (relatív) permeabilitása. Formálisan ez az elektrosztatikához hasonlít

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.59)$$

Diamágneses anyagoknál $\chi < 0$ vagyis $\mu < \mu_0$, ami annak felel meg, hogy a generálódó mikroszkopikus mágnesezettség csökkenteni igyekszik a külső mágneses tér hatását. Olyan anyagoknál, ahol az elemi összetevőknek nincs mágneses dipólmomentumuk az indukció (l. később) által létrehozott elemi áramhurkok ilyen tulajdonságúak (Lenz-törvény). Ha összehasonlítjuk az elektrosztatikával, akkor az indukció és a töltésmegosztás hasonló szerepet játszik abban, hogy mindkettő csökkenteni igyekszik a megfelelő külső tér hatását. Az együtthatók szintjén azért borul fel az analógia, mert $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, de a fizikailag erőhatást kifejteni képes mágneses indukció esetén az anyagi konstanst pont reciprokon módon vezettük be: $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$. Vagyis $\varepsilon_r > 1$ megfelel $1/\mu_r > 1$ esetnek, azaz $\mu_r < 1$.

Ha az elemi összetevők maguk is mágnesek, akkor a feljebb tárgyalt forgatónyomaték hatására \mathbf{m} a \mathbf{B} irányába igyekszik beállni, vagyis $\mathbf{M} \sim \mathbf{B}$. Emiatt $\chi > 0$, azaz $\mu > \mu_0$. Ezek a *paramágneses anyagok*. Ennek nincs megfelelője az elektrosztatikában, hiszen ott $\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$, ami miatt ismét az ε_r növekedését kapjuk.

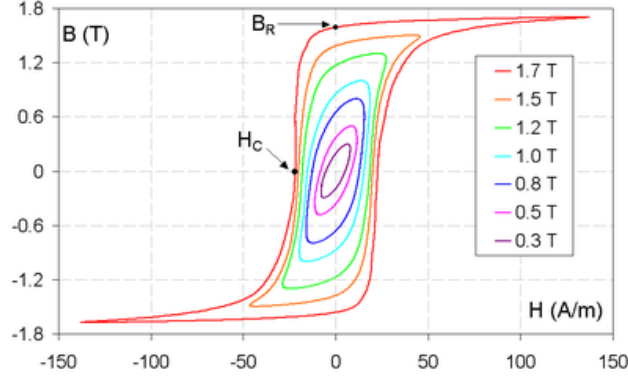
Ha a lineáris közelítés jó, akkor általában kicsi a χ értéke, tipikusan $|\mu - \mu_0|/\mu_0 \sim 10^{-5}$, vagyis sokszor elhanyagolható.

- **(anti)-ferromágneses anyagok:** ha az anyag rendelkezik mágneses szerkezettel, azaz elemi dipólok, akkor ezen dipólok egymásra hatását is olykor figyelembe kell venni. Ha csak a mágneses dipólok kölcsönhatását tekintenénk, akkor ezek egymással ellentétesen fordulva megszüntetnék a mágneses teret. Azonban az anyag mágneses dipóljai (spinje) közötti kölcsönhatások alapvetően kvantum eredetűek, amelyek jóval erősebbek lehetnek a mágneses kölcsönhatásnál. Ezekben az anyagokban a mezoszkopikus mágneses szerkezetet nem a külső mágneses indukció határozza meg elsősorban.

Ha az elemi mágneses dipólok ellentétes beállása preferált, akkor makroszkopikusan nem látható mágneses tér, csakúgy, mintha csak a mágneses kölcsönhatást tekintettük volna: ezek az antiferromágneses anyagok.

Ha az elemi mágneses dipólok párhuzamos beállása preferált, akkor homogén mágnesezettség alakulhat ki külső mágneses indukció hiányában is: ezek a ferromágneses anyagok. Hogy a teljes anyag mágneses energiáját csökkentjük, különböző mágnesezettségű tartományok (domének) alakulnak ki, ez a doménszerkezet határozza meg az anyag teljes mágneses terét. Külső mágneses indukció alkalmazásával ezek a doménfalak vándorolnak, s így az anyag mikroszkopikus szerkezete megváltozik. Emiatt a mágneses indukció kikapcsolásával már egy más doménszerkezetű, más mágneses terű anyagot találunk. Ez a hiszterézis jelensége (l. Fig. (3.2))

Habár a jelenség nem lineáris, minden pontban beszélhetünk permeabilitásról $\mu(\mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{B}$ alapján. Mivel a mágneses domének határa jóval könnyebben mozgatható, mint az elemi spinek, ezért jóval nagyobb mágneses permeabilitást kapunk, mint a dia- illetve paramágneses anyagoknál, akár $\mu/\mu_0 \sim 10^6$ is lehet, de 10^3 - 10^4 tipikus értékek (a fenti ábrán tipikusan 10^4). A gyors változás addig tart, amíg a



3.2. ábra. Hiszterézis hurok (<http://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>)

teljes anyag egy mágneses domén, ekkor a μ értéke lecsökken a paramágneses anyagok szintjére, azaz több nagyságrendet esik. Ez a mágneses telítődés (szaturáció). Mágneses szaturációnál a mágneses indukció értéke a legjobb vasötvözeteknél ~ 2 T.

Ha kikapcsoljuk a külső mágneses teret, miután szaturáltuk az anyagot, akkor kapunk egy remanens mágneszettséget, azaz egy megmaradó mágneses dipólsűrűséget.

3.3.4. Határfeltételek

Tekintsünk olyan anyagot, ahol az anyagi jellemzők hirtelen változnak meg (részlegesen homogén anyagok). A határon a $\text{div } \mathbf{B} = 0$ elektrosztatikai analógiával

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (3.60)$$

Ha ismét csak az elektrosztatikai esettel analóg módon veszünk a határfelületre merőlegesen egy Δl hosszú és nagyon keskeny téglalapot, az Ampère törvény szerint:

$$\oint ds \mathbf{H} = \int d\mathbf{f} \mathbf{J} = (\mathbf{K}t)\Delta l, \quad (3.61)$$

ahol \mathbf{K} a szabad felületi áramsűrűség és t a téglalap és a felület metszészvonalával párhuzamos egységvektor. A vonalintegrálba csak a téglalap hosszabbik oldala menti szakaszok adnak járulékot, azaz

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{n})(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\Delta l = \mathbf{t}(\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)) = (\mathbf{K}t)\Delta l, \quad (3.62)$$

amiből

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}. \quad (3.63)$$

Két anyag határán nem csak szabad felületi áramsűrűség lehetséges. Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel a polarizációs felületi áramsűrűség

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \mathbf{K}_{mikr}, \quad (3.64)$$

ezt a fenti határfeltétel a mágneses térerősségben tartalmazza, mivel $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

Ha lineáris anyagunk van és nincs szabad felületi áramsűrűség, akkor a határfeltételek a következő alakban írhatók fel:

$$\mu_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{n} \quad \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}. \quad (3.65)$$

Fontos határeset, amikor $\mu_2 \gg \mu_1$. Ekkor $H_{2n} \gg |H_{2t}|$, vagyis \mathbf{H}_2 jó közelítéssel merőleges a határfelületre, hasonlóan az elektromos térhez egy fémfelületen. Ebből következik, hogy egy nagy permeabilitású anyag felülete közel „ekvipotenciális”.

3.4. Mágneses skalárpotenciál

3.4.1. Megoldási módszerek, a skalárpotenciál

Megoldandó

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{és} \quad B_n, H_t \text{ folytonosak.} \quad (3.66)$$

Ennek megoldásánál a következő szempontokat vehetjük figyelembe

- A legáltalánosabb esetben is vektorpotenciál mindig bevezethető: $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Ekkor adott $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ reláció esetén így a

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}(\operatorname{rot} \mathbf{A})) = \mathbf{J}, \quad \text{vagy} \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 [\mathbf{J} + \operatorname{rot} M(\operatorname{rot} \mathbf{A})] \quad (3.67)$$

egyenleteket kell megoldanunk.

- Ha részlegesen homogén közegeket tekintünk, akkor az anyagi paraméterek állandó értékével számolhatunk a homogén részekben, a közeghatárokon a fent tárgyalt határfeltételeket alkalmazzuk. A következőkben csak ilyenek tárgylására szorítkozunk.
- Ha az anyag lineáris, akkor $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ összefüggés alkalmazható. Hasonló közelítés alkalmazható akkor is, ha az anyag nem lineáris ugyan, de nem túl nagy változásokat tekintünk. Ha például az anyagban maradandó M_0 mágnesezettség van, akkor kis terek esetén felírható $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$. A két esetet összevonva Coulomb mértékben ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) kapjuk

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} - \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{folytonos a határon.} \quad (3.68)$$

- Ha $\mathbf{J} = 0$, akkor $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ miatt létezik (mágneses) skalárpotenciál, $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi_M$. Ha $\mathbf{J} = 0$ csak egy véges térrészre vonatkozik, akkor ott ugyan bevezethető a mágneses skalárpotenciál, azonban nem feltétlenül egyértékű függvényként. Ugyanis az Ampère törvény alapján

$$\oint ds \mathbf{H} = -\delta \Phi_M = \int d\mathbf{f} \mathbf{J} \Rightarrow \delta \Phi_M = - \int d\mathbf{f} \mathbf{J} = -I, \quad (3.69)$$

azaz Φ_M -nek ugrása van. Végtelen vezető esetén például $\Phi_M = -I\varphi/(2\pi)$, innen gradiens képzéssel adódik a már látott (3.22) képlet. Ha ebben az esetben általános lineáris közelítést alkalmazunk az anyagban, akkor

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div}(\mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0) = -\mu \Delta \Phi_M + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}_0. \quad (3.70)$$

Összefoglalva tehát ekkor a megoldandó egyenlet

$$\mu \Delta \Phi_M = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}_0, \quad \Phi_M \quad \text{és} \quad -\mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial n} + \mu_0 \mathbf{n} \mathbf{M}_0 \quad \text{folytonos a határon.} \quad (3.71)$$

3.4.2. Speciális elrendezések mágneses terei

Feladat: Homogén \mathbf{H}_0 mágneses térbe helyezett μ permeabilitású R sugarú gömb mágneses tere és indukciója.

Megoldás: Ezt már megoldottuk elektrosztatikában (l. (2.121)). Annak analógiájára

$$\text{kívül:} \quad \Phi_M = -\mathbf{H}_0 \mathbf{x} \left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \right] \quad \text{belül:} \quad \Phi_M = -\frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0 \mathbf{x}, \quad (3.72)$$

vagyis kívül a külső tér mellett egy dipól járulékát kapjuk

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R^3 \mathbf{H}_0. \quad (3.73)$$

Belül egyenletes teret kapunk:

$$\mathbf{H} = \frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \frac{3(\mu_r - 1)}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0. \quad (3.74)$$

Tökéletes diamágnes esetén $\mu_r = 0$, vagyis a mágneses indukció belül nulla, leárnyékolódik a külső tér.

Erős ferromágnes esetén μ_r nagy, vagyis a belső mágneses tér nulla.

Feladat: Mekkora a mágneses tér és mágneses indukció egy R sugarú gömbmágnes esetében, ha mágnesezettsége homogén \mathbf{M}_0 ?

Megoldás: Válasszuk a z irányt \mathbf{M}_0 irányának. A határon B_n folytonos, amiből

$$\mathbf{H}_{2n} - \mathbf{H}_{1n} = \mathbf{nM}_0 = \frac{\mathbf{xM}_0}{r} = M_0 \frac{z}{r} = M_0 \cos \theta. \quad (3.75)$$

A Laplace egyenlet megoldását két részletben keressük: belül legyen Φ_{M1} , kívül Φ_{M2} , ezekre

$$\Delta \Phi_{M1} = 0, \quad \Delta \Phi_{M2} = 0. \quad (3.76)$$

A határfeltételek

$$\Phi_{M1} = \Phi_{M2}, \quad \partial_n \Phi_{M1} - \partial_n \Phi_{M2} = \mathbf{nM}_0 = M_0 \cos \theta. \quad (3.77)$$

A megoldást a (2.118)-hez hasonló alakban keressük. Mivel az $r = 0$ illetve az $r = \infty$ értékek végesek, marad

$$\Phi_{M1} = Ar \cos \theta, \quad \Phi_{M2} = B \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (3.78)$$

A határfeltételek:

$$AR = \frac{B}{R^2}, \quad A + \frac{2B}{R^3} = M_0 \Rightarrow A_1 = \frac{M_0}{3}, \quad B_1 = R^3 \frac{M_0}{3}. \quad (3.79)$$

Tehát a gömb belsejében

$$\Phi_{M1} = \frac{M_0}{3} z \Rightarrow \mathbf{H}_{\text{belül}} = -\frac{\mathbf{M}_0}{3}, \quad \mathbf{B}_{\text{belül}} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}_0. \quad (3.80)$$

Belül a mágneses tér és mágneses indukció homogén. Érdekes, hogy a mágneses tér ellentétes a mágnesezettséggel. Kívül:

$$\Phi_{M2} = \frac{M_0 R^3}{3r^2} \cos \theta. \quad (3.81)$$

Ez egy $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}_0$ erősségű dipól tere. Ha kiszámítjuk a dipólsűrűséget $\frac{\mathbf{m}}{V_{\text{gömb}}} = \mathbf{M}_0$, visszakapjuk a gömbmágnes homogén mágnesezettségét.

Feladat: Mi történik, ha egy \mathbf{M}_0 mágnesezettségű gömböt külső \mathbf{B}_0 térbe helyezük?

Megoldás: A szuperpozíció elve miatt az előző feladat megoldásához hozzáadhatjuk a külső mágneses teret, így a belső tér:

$$\mathbf{B}_{bent} = \mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}_0, \quad \mathbf{H}_{bent} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M}_0. \quad (3.82)$$

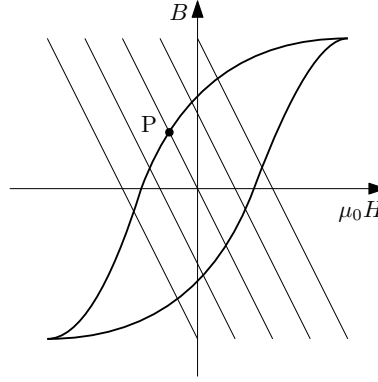
Vegyünk most egy permanens mágnesezettségű gömböt és először tegyük fel, hogy paramágneses vagy diamágneses anyagból van. Ekkor $\mathbf{B}_{bent} = \mu\mathbf{H}_{bent}$, vagyis:

$$\mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}_0 = \frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{\mu}{3}\mathbf{M}_0. \quad (3.83)$$

Átrendezve

$$\mathbf{M}_0 = \frac{3}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{B}_0, \quad (3.84)$$

ami teljesen analóg a dielektromos gömbre kapott eredménnyel (l. (2.124)).



3.3. ábra. Gömbmágnes hiszterézis diagramja.

Ferromágneses anyag esetén a hiszterézis összefüggés miatt érdemesebb \mathbf{M}_0 -t eltüntetni az egyenletekből:

$$\mathbf{B}_{bent} + 2\mu_0\mathbf{H}_{bent} = 3\mathbf{B}_0. \quad (3.85)$$

Ez a hiszterézis diagramon egy egyenest definiál -2 meredekséggel és $3\mathbf{B}_0$ metszésponttal. \mathbf{B}_{bent} és \mathbf{H}_{bent} ekkor ennek az egyenesnek és a $B(\mu_0 H)$ hiszterézis görbe metszéspontjának koordinátái lesznek. Ha a külső teret először addig növeljük, hogy a ferromágneses gömb szaturálódjon, majd lecsökkentjük nullára, akkor a 3.3. ábra P pontjának megfelelő gömbmágnesest kapjuk.

A \mathbf{B}_{bent} és \mathbf{H}_{bent} közötti reláció specifikusan a gömbre jellemző, azonban más geometriákra is lehet általánosítani:

$$\mathbf{H}_{bent} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M}_0 \Rightarrow \mathbf{H}_{bent} = \mathbf{H}_0 - \frac{\gamma}{4\pi}\mathbf{M}_0. \quad (3.86)$$

Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\frac{\gamma}{4\pi}\mathbf{B}_{bent} + \left(1 - \frac{\gamma}{4\pi}\right)\mu_0\mathbf{H}_{bent} = \mathbf{B}_0. \quad (3.87)$$

Ellipszoid esetén egzaktul megoldható a probléma és a mágneses tér irányától és a főtengelyek hosszától függően $0 \leq \gamma \leq 4\pi$. Az egyik határeset, amikor egy végtelen síkunk van, vagyis az ellipszoid két tengelye végtelenhez tart, egy pedig nullához. Ekkor a síkra merőleges irányban $\gamma = 4\pi$ a síkkal párhuzamosan pedig $\gamma = 0$. A másik határeset egy végtelen rúd, amikor az egyik tengely végtelenhez tart, a másik kettő pedig nullához. Ekkor a rúddal párhuzamos irányban $\gamma = 0$, rá merőlegesen pedig $\gamma = 2\pi$. Az egyenes meredeksége fordítottan arányos γ -val, ezért érdemes rúd alakú mágnesekeket használni, mivel ekkor lesz a legnagyobb a belső mágneses indukció. Gömb esetén $\gamma = 4\pi/3$.

4. fejezet

Kvázistacionárius terek

4.1. Faraday törvénye, Galilei invariancia

Míg egy töltés egy semleges testet polarizál, azaz elektromosan aktívvá tesz, egy áramkör jelenléte nem indukál áramot egy mellette levő vezető hurokban. De Faraday 1831-ben észrevette, hogy az áram megváltozása már hatással van a másik áramkörre. A körben indukálódó feszültség, Faraday megfigyelése szerint, arányos a mágneses fluxus változásával:

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell}, \quad \mathcal{F} = \int_F \mathbf{B} d\mathbf{f} \Rightarrow \mathcal{E} = -k \frac{d\mathcal{F}}{dt}. \quad (4.1)$$

A k együttható értéke SI-ben 1, amire a Galilei invarianciából lehet következtetni. Tegyük fel ugyanis először, hogy a vezető hurokunk a K laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben \mathbf{v} sebességgel mozog. Az előző egyenletbe az integrálokat behelyettesítve:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E}' d\boldsymbol{\ell} = -k \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} d\mathbf{f}. \quad (4.2)$$

ahol \mathbf{E}' a hurokhoz képest (a vele együtt mozgó K' vonatkoztatási rendszerben) mért térerősség (ez adja a hurokban indukált áramot hajtó teljes elektromotoros erőt). Itt teljes idő szerinti deriválás szerepel, vagyis általános esetben:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B}, \quad (4.3)$$

ahol az első tag maga a tér időbeli változása, a második pedig integrálási felület elmozdulásából adódik. Ez tovább alakítható, ha figyelembe vesszük, hogy $\text{div } \mathbf{B} = 0$:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}). \quad (4.4)$$

Ezt visszaírva a (4.2) egyenletbe és átrendezve:

$$\oint_{\partial F} [\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\boldsymbol{\ell} = -k \int_F \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} d\mathbf{f}. \quad (4.5)$$

Ugyanakkor a laboratóriumi rendszerben a hurokra úgy is nézhetünk, mint ami adott időpillanatban egy adott pozícióban van, és erre az elképzelt nyugvó hurokra alkalmazhatjuk Faraday törvényét:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = -k \int_F \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} d\mathbf{f}, \quad (4.6)$$

ahol \mathbf{E} -t a laboratóriumi rendszerben mért elektromos térerősségként értelmezhetjük, ami egy a K laboratóriumi rendszerben nyugvó hurokban adná meg az indukált áramot hajtó elektromotoros erőt.

A Galilei invariancia feltételezése szerint a két egyenlet bal oldalainak meg kell egyezniük, vagyis $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Ennek a töltésre ható erő ad jelentőséget. Egy nyugalomban lévő töltött részecskére ható erő $q\mathbf{E}$. Ha ezt összevetjük a mozgó töltésre ható erővel (l. (3.45)), akkor rögtön látszik, hogy az elméletünk akkor konzisztens, ha $k = 1$. A mozgó hurok saját K' rendszerében az \mathbf{E}' által megadott elektromotoros erőt a K laboratóriumi rendszerből nézve ugyanis az \mathbf{E} elektromos erőter által kifejtett erő és a \mathbf{v} sebességgel mozgó töltésre a \mathbf{B} mágneses mező által kifejtett erő összege adja.

A fenti levezetés egyben azt is mutatja, hogy mozgó koordinátarendszerbe való áttérés esetén a mezők a következőképpen transzformálódnak:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad , \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} . \quad (4.7)$$

Ez a levezetés szigorúan véve csak kis sebességek esetén helyes, amennyiben a relatív sebesség a fénysebességhez képest jelentős, a Galilei invariancia helyett a Lorentz invarianciát kell figyelembe venni. Ugyanakkor a fenti megfontolás a teljes transzformáció vezető tagját veszi figyelembe a $|\mathbf{v}| \ll c$ határesetben, és már ez a tag rögzíti a k konstans értékét. Látni fogjuk, hogy a teljes Maxwell-egyenletek egzaktnak eleget tesznek majd a Lorentz invarianciának, és $k = 1$ marad, azonban az elektromos és mágneses mező transzformációs szabályai módosulnak.

A Stokes-tételt felhasználva felírható a Faraday-törvény differenciális alakja is, ami a második Maxwell-egyenlet időfüggő, teljes alakja:

$$\int_F \left[\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d\mathbf{f} = 0, \quad \forall F \Rightarrow \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.8)$$

ahol F egy tetszőleges az adott vonatkoztatási rendszerben (amiben a mezőket mérjük) nyugalomban lévő hurok határolta felület.

4.2. Mágneses mező energiája

A magnetosztatika tárgyalása során elkerültük a mágneses mező energiájának diszkusszióját. Ennek oka, hogy azok felépítése során elkerülhetetlenek a kezdeti tranzienst szakaszok, amikor is az áramok és a mező időben változnak. A Faraday-törvény segítségével azonban már elkezdhetjük felépíteni az áramokat. Egyetlen \mathbf{v} sebességgel mozgó töltéshordozóra ható erő teljesítménye $\mathbf{v}\mathbf{F} = q\mathbf{v}\mathbf{E}'$, amit ha felösszegzünk egy teljes áramkörre:

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{d\mathcal{F}}{dt}, \quad (4.9)$$

azaz ha egy I áramot szállító áramkörben $\delta\mathcal{F}$ -val változik a fluxus, akkor a források által végzett munka

$$\delta W = I\delta\mathcal{F}. \quad (4.10)$$

Most tegyük fel, hogy elég lassan építjük fel az áramainkat ahhoz, hogy $\text{div } \mathbf{J} = 0$ jó közelítéssel igaz maradjon. Ekkor a rendszerünket elemi köráramok hálózatára bonthatjuk fel, melyek jellemző keresztmetszete legyen $\Delta\sigma$. Ekkor az elektromotoros erő ellenében végzett munka:

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int_F \mathbf{n}\delta\mathbf{B}d\mathbf{f} = J\Delta\sigma \int_F \text{rot } \delta\mathbf{A}d\mathbf{f} = J\Delta\sigma \oint_{\partial F} \delta\mathbf{A}d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.11)$$

De az elemi köráramokra való felosztásnak köszönhetően $J\Delta\sigma d\ell = \mathbf{J}d^3x$, vagyis az összes köráramra felösszegezve térfogati integrált kapunk:

$$\delta W = \int \delta \mathbf{A} \mathbf{J} d^3x. \quad (4.12)$$

Ha felhasználjuk az Ampère törvényt és a vegyes szorzat azonosságát:

$$\delta W = \int \delta \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{H}) d^3x = \int [\mathbf{H} (\nabla \times \delta \mathbf{A}) + \nabla (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A})] d^3x. \quad (4.13)$$

Ha az árameloszlás lokalizált, akkor a második tag eltűnik és felhasználva, hogy $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$\delta W = \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} d^3x. \quad (4.14)$$

Lineáris anyag esetén $\mathbf{H} \delta \mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{H} \mathbf{B})$, vagyis felösszegezve, illetve a második egyenlet esetén parciálisan is integrálva:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \mathbf{B} d^3x = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \mathbf{A} d^3x. \quad (4.15)$$

A mágneses mezőbe helyezett μ_1 permeabilitású anyag problémája az elektrosztatikus esettel analóg módon vezethető le, ahol \mathbf{E} szerepét \mathbf{B} és \mathbf{D} szerepét \mathbf{H} veszi át. Ekkor az energia megváltozása

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \mathbf{H}_0 - \mathbf{H} \mathbf{B}_0) d^3x = \frac{1}{2} \int (\mu_1 - \mu_0) \mathbf{H} \mathbf{H}_0 d^3x = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} \right) \mathbf{B} \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (4.16)$$

Ha az anyagunk szabat térben van, akkor a mágnesezettséggel is kifejezhető az energia megváltozása

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (4.17)$$

Érdeemes megfigyelni, hogy ez az eredmény analóg (2.136)-el az előjelet leszámítva. A különbség oka, hogy az energia tartalmazza a anyag behozatala során keltett elektromotoros erők ellenében végzett munkát is, vagyis ez a probléma a rögzített potenciálú esettel analóg, nem pedig a rögzített töltésűvel.

4.3. Indukciós együtthatók

Vegyünk változó áramsűrűségű rendszert homogén közegben. Egy kijelölt $C = \partial F$ görbe mentén mérhető elektromotoros erő ekkor, (4.2) alapján:

$$\mathcal{E}_C = -\partial_t \int_F d\mathbf{f} \mathbf{B} = -\partial_t \oint_C ds \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_C ds \int d^3\mathbf{x}' \frac{\partial_t \mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.18)$$

Tegyük fel, hogy az áramok vezetőkben folynak, és a vezetőkben az árameloszlás térbeli eloszlása nem változik időben, csak a nagysága. Vagyis

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}') = \sum_i I_i(t) \mathbf{j}_i(\mathbf{x}'). \quad (4.19)$$

Ezt visszaírva kapjuk:

$$\mathcal{E}_C = -\sum_i L_{Ci} \dot{I}_i, \quad L_{Ci} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C ds \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.20)$$

Az L csak az árameloszlás geometriájától függ, azaz időben állandó, neve indukciós együttható.

Ha vékony vezetőkről van szó, amelyek C_i görbék mentén folynak, akkor a k -edik körben ébredő elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_k = - \sum_i L_{ki} \dot{I}_i, \quad L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_k} d\mathbf{s} \cdot \oint_{C_i} d\mathbf{s}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.21)$$

ha $k \neq i$, és ekkor L_{ki} a kölcsönös indukció együttható. $k = i$ esetén önindukciós együtthatóról beszélünk, de ekkor nem szabad a vezető vastagságát elhanyagolni, különben az integrál divergens.

(4.15) alapján felírható a rendszer energiája is:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d^3x = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{C_i} \mathbf{A} d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \mathcal{F}_i. \quad (4.22)$$

Viszont

$$\mathcal{E}_i = -\dot{\mathcal{F}}_i = - \sum_j L_{ij} \dot{I}_j \Rightarrow \mathcal{F}_i = \sum_j L_{ij} I_j, \quad (4.23)$$

azaz

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} I_i I_j. \quad (4.24)$$

4.4. Kvázistacionárius jelenségek vezetőkben, dimenzióanalízis, kisimulás

Ahogy ebben a fejezetben láttuk, ha a mágneses indukció időben változik, elektromos mező keltődik és a rendszer többé nem tisztán mágneses. Ha azonban az időbeli változás nem túl gyors, kvázistacionárius viselkedésről beszélhetünk. Mint azt később látni fogjuk, ez azt jelenti, hogy a fény véges terjedési sebessége elhanyagolható és a mezők úgy tekinthetők, hogy a megváltozásuk azonnali a tér minden pontjában. Az egyenleteink ekkor

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.25)$$

Ezeket kiegészíti vezetők jelenlétében az *Ohm-törvény*:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4.26)$$

A Faraday-törvényt átrendezve és kihasználva, hogy $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (4.27)$$

vagyis a skalár potenciált továbbra is alkalmazhatjuk:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.28)$$

A továbbiakban foglalkozzunk azzal az esettel amikor $\varrho = 0$, vagyis \mathbf{E} egyetlen forrása a változó \mathbf{B} . Ekkor $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\Phi = 0$, illetve Coulomb-mértékben dolgozva $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Lineáris, frekvencia független anyag esetén:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \mu \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \text{rot rot } \mathbf{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.29)$$

Mivel $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

$$\Delta \mathbf{A} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.30)$$

ami egy diffúziós egyenlet. Levezethető, hogy ugyan ez az egyenlet igaz lesz \mathbf{E} -re, \mathbf{B} -re és \mathbf{J} -re is.

(4.30) lehetőséget ad arra is, hogy megbecsüljük egy kezdeti állapot lecsengésének τ időskáláját. Ha a rendszerünkben a térbeli változások karakterisztikus távolsága L , akkor

$$\Delta \mathbf{A} \sim \frac{1}{L^2} \mathbf{A}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \sim \frac{1}{\tau} \mathbf{A} \Rightarrow \tau \sim \mu \sigma L^2. \quad (4.31)$$

Például egy 1 cm sugarú rézgömb esetén ez 5 – 10 ms nagyságrendnek felel meg, míg a föld magja esetén 10^5 évnak, ami konzisztens a földtani mérések alapján a mágneses pólusok megfordulásának körülbelül 10^6 évenkénti gyakoriságával.

4.5. Skin-effektus

Feladat: Adott egy féltéret kitöltő μ_r relatív permeabilitású anyag. Kívül határfeltételként $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ mágneses teret írunk elő, ahol \mathbf{H}_0 konstans. Milyen lesz a mágneses tér az anyagban?

Megoldás: Az anyagon belül igaz a hővezetési egyenlet \mathbf{H} -ra

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{H}. \quad (4.32)$$

A határon \mathbf{H}_t és $\mu \mathbf{H}_n$ folytonos minden időpillanatban. Emiatt minden arányos $e^{-i\omega t}$ -vel, vagyis

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \Rightarrow \Delta \mathbf{h} = -i\omega \mu \sigma \mathbf{h}. \quad (4.33)$$

A kezdeti feltétel független a transzverzális (x és y) koordinátáktól, így a megoldás is az lesz. Legyen a normális koordináta z , ekkor

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(z) \Rightarrow \frac{d^2 h_i}{dz^2} = -i\omega \mu \sigma h_i. \quad (4.34)$$

Ennek megoldása

$$h_i(z) = h_i(0) e^{\pm \kappa z}, \quad \kappa^2 = -i\omega \mu \sigma \Rightarrow \kappa = \sqrt{-i\omega \mu \sigma} = \frac{1-i}{\delta}, \quad \text{ahol } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (4.35)$$

Határfeltétel, hogy $z \rightarrow \infty$ esetén ne legyen végtelen a tér, emiatt a negatív előjelet kell választanunk. Ezenfelül a transzverzális H megy folytonosan át a határon, valamint a normális irányú B . Emiatt

$$\mathbf{H}_t(t, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_0 t e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}, \quad H_n(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_r} H_{0n} e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}. \quad (4.36)$$

Vagyis valamennyi komponens amplitúdója exponenciálisan lecseng δ karakterisztikus távolságon. Adott anyag esetén a frekvencia növekedtével δ csökken. Nagy frekvencia mellett a mágneses tér tehát egyre inkább csak az anyag felületén van jelen. Emiatt ezt az effektust bőr-effektusnak (skin-effektus) nevezzük, a δ mennyiséget pedig behatolási mélységnek vagy skin mélységnek.

Ideális diamágnesnél vagy tökéletes vezetőben $\delta = \infty$, azaz nincs lecsengés. Ugyanakkor a normál komponens amplitúdója le van normálva $1/\mu_r$ -rel, vagyis ha van kívül B_n , akkor belül a H_n végtelen, így az energia is $(BH/2)$. Ez azt jelenti, hogy ideális diamágnes vagy tökéletes vezető külső felületén $B_n = 0$ kell legyen.

Az áramsűrűség:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(t, z) = \frac{i-1}{\delta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_t. \quad (4.37)$$

Az áramsűrűség arányos a transzverzális mágneses térrel, azaz ez is lecseng z -ben. Nagy frekvenciánál tehát csak a vezetők felületén folyik áram.

Kiszámíthatjuk a hőveszteséget is. A lokális hőteljesítmény

$$\mathcal{P} = \mathbf{J}\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{J}^2 = \frac{2}{\delta^2\sigma} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{3\pi}{2}\right) e^{-2z/\delta}. \quad (4.38)$$

Egy periódusra átlagolva $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ miatt a következő alakhoz jutunk:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\delta^2\sigma} H_{0t}^2 e^{-2z/\delta} = \frac{\mu\omega H_{0t}^2}{2} e^{-2z/\delta}. \quad (4.39)$$

A teljes leadott teljesítmény egy $dxdy$ felületen:

$$\langle P \rangle = \int d^3\mathbf{x} \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{dxdy H_{0t}^2}{\delta^2\sigma} \int_0^\infty dz e^{-2z/\delta} = \frac{dxdy H_{0t}^2}{2\delta\sigma} \quad (4.40)$$

5. fejezet

Elektrodinamika

5.1. Maxwell-egyenletek

5.1.1. Előzmények

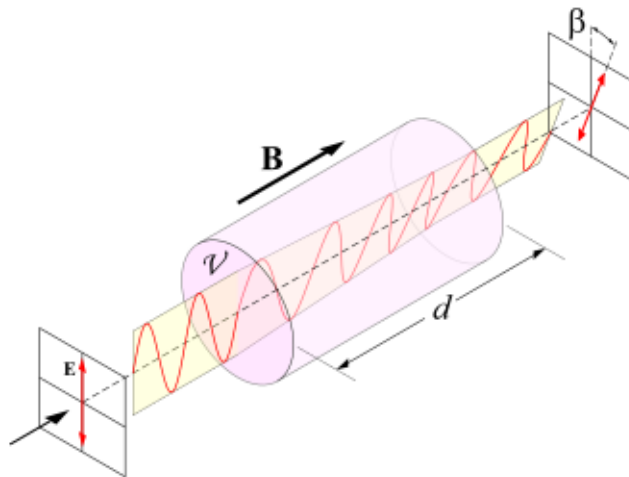
Az ebben a fejezetben tárgyalt teljes Maxwell-egyenletek egyik legfontosabb következménye az elektromágneses hullámok létezése, amik fénysebességgel terjednek. A fény és az elektromágnesség közti kapcsolatra azonban már Maxwellt megelőzően is utaltak eredmények:

1. A Faraday effektus

Amennyiben egy közegben mágneses mező van, akkor az annak irányába terjedő fény polarizációs síkja elfordul. Az elfordulás β szöge arányos a mágneses indukció nagyságával és a fény által megtett úttal:

$$\beta = \mathcal{V} B d, \quad (5.1)$$

ahol \mathcal{V} a közegre anyagi minőségétől függő ún. Verdet együttható.



5.1. ábra. A Faraday-effektus (forrás: upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Faraday-effect.svg)

2. A Weber-Kohlrausch kísérlet

Ha a töltés mértékegységét úgy választjuk meg, hogy két q_1 és q_2 ponttöltés között ható erőt megadó Coulomb-törvény alakja

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (5.2)$$

legyen, akkor Ampère áramelemekre vonatkozó erőtörvénye az

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \frac{I_1 d\mathbf{s}_1 \times (I_2 d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (5.3)$$

alakot ölti, ahol c („constant”) az ún. Weber konstans, ami az elektromos és mágneses egységek arányát adja meg¹. A mértékegységek összevetéséből adódik, hogy c mértékegysége sebességnek felel meg, a standard SI egységekben ez az arány

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu_0/4\pi}{1/4\pi\epsilon_0} = \epsilon_0\mu_0 \quad (5.4)$$

értékűnek adódik. Weber és Kohlrausch a c értékét 1856-ban a következőképpen mérték meg. Feltöltöttek egy ismert kapacitású leideni palackot egy adott feszültségre, ami egy ismert mennyiségű töltést jelentett. A palackot ezután kisütötték egy ún. ballisztikus galvanométeren keresztül, ami az áram időbeli integrálját mérte annak mágneses hatásán keresztül. Ebből a c értékére

$$c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{s} \quad (5.5)$$

adódott. Ez a hibahatáron belül megegyezett a fénysebesség értékével, amit Fizeau 1849-ben forgó fogaskerekes, majd pedig Fizeau és Foucault 1850-ben forgó tükrös elrendezéssel határozott meg.

3. A távíró jel terjedési sebessége

A két vezetékből álló érpár alkotta távíróvonalat leíró egyenleteket Kirchhoff írta fel 1857-ben. Ehhez a kvázistacionárius terek már ismert összefüggéseit kiegészítette a róla elnevezett áramkörüi törvényekkel. Ha a távíróvonal feszültségét $V(x, t)$, a rajta folyó áramot pedig $I(x, t)$ írja le az x hosszmenti koordináta és t idő függvényében, akkor az egyenletek a következő alakot öltik:

$$\text{Kirchhoff I: } \frac{\partial V}{\partial x} = -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t} - \mathcal{R} I$$

$$\text{Kirchhoff II: } \frac{\partial I}{\partial x} = -\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t} - \mathcal{G} V, \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

ahol \mathcal{L} a vezeték hosszegységre eső inductivitása, \mathcal{C} a hosszegységre eső kapacitás, \mathcal{R} a hosszegységre eső ellenállás és \mathcal{G} a két érpárat elválasztó szigetelő közeg hosszegységre eső vezetőképessége.

Amennyiben a távíróvonal veszteségeit (\mathcal{R} és \mathcal{G}) elhanyagolhatjuk, a két egyenlet a következő alakban vonható össze:

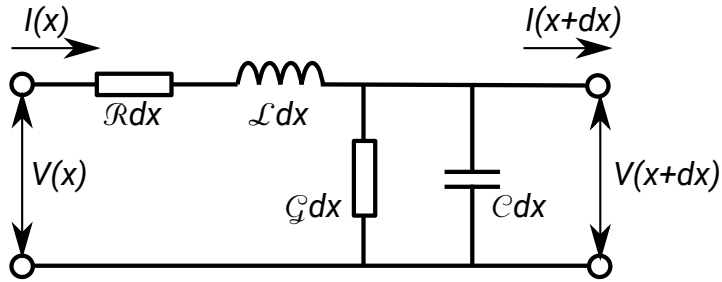
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{L}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (5.8)$$

amiből a jelterjedés sebessége

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{L}}}. \quad (5.9)$$

Kirchhoff ideális vékony vezetőre megmutatta, hogy $v = c$, azaz a sebesség megegyezik a Weber-konstanssal.

¹Weber eredeti definíciója egy $\sqrt{2}$ faktoriall tért el az itt alkalmazottól.



5.2. ábra. A távíróvonal x és $x + dx$ közti szakaszának áramköri modellje

Feladat: Számoljuk ki két végtelen hosszú koncentrikus ideális fémből álló henger alkotta távíróvonalra a hosszegységre eső induktivitást és kapacitást, és mutassuk meg, hogy a terjedési sebesség megegyezik a Weber konstanssal!

Megoldás: A két henger határolta térrész belső sugara legyen r_1 , a külső r_2 és vegyünk egy l hosszúságú darabot. Amennyiben ennek a darabnak egyenletesen eloszló $\pm Q$ töltése van a két fegyverzeten, akkor a köztük lévő elektromos térerősség sugárirányú és nagysága

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}, \quad (5.10)$$

ebből a feszültség

$$V = \int_{r_1}^{r_2} dr E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (5.11)$$

és

$$C = \frac{1}{l} \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (5.12)$$

Ha az érpárban folyó áram I , akkor a mágneses indukcióvonalak a vezeték tengelye körüli körök, és

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (5.13)$$

ahonnan a két vezető közötti mágneses fluxus

$$\Phi = l \int_{r_1}^{r_2} dr B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (5.14)$$

Ebből

$$\mathcal{L} = \frac{1}{l} \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1), \quad (5.15)$$

amiből a jelterjedés sebességre

$$v = \frac{1}{\sqrt{C\mathcal{L}}} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c \quad (5.16)$$

adódik.

5.1.2. Eltolási áram

Az elektromosság és mágnesség eddig megismert törvényei:

$$\begin{aligned} \text{Coulomb-törvény: } \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varrho, & \text{Ampère-törvény: } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \text{Faraday-törvény: } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{Mágneses monopólusok hiánya: } \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

A Faraday-törvényt leszámítva ezek mind sztatikus jelenségek megfigyeléséből származnak és nincs semmi okunk azt feltételezni, hogy időben változó mezőkre is mind változatlan marad. Különösen, hogy ezek az egyenletek jelenlegi formájukban nem konzisztensek. Maxwell jött rá 1865-ben, hogy az Ampère törvény időben változó mezők esetén hiányos, ugyanis magába foglalja az stacionárius áramok $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ feltételét:

$$\nabla \mathbf{J} = \nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = 0, \quad (5.18)$$

az általános összefüggés azonban

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (5.19)$$

Ha viszont felhasználjuk a Coulomb-törvényt:

$$\nabla \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.20)$$

Ezután Maxwell lecserélte \mathbf{J} -t az Ampère-törvényben erre az általánosított alakra

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.21)$$

ahol a második tagot *eltolási áramnak* nevezte el. Ezzel egy konzisztens egyenletrendszeret kaptunk, a Maxwell egyenleteket, melyek vákuumbeli alakja:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}} \quad (5.22)$$

Vegyük észre, hogy amikor Kirchhoff a távíró egyenleteket felírta, akkor a kvázistacionárius esetre érvényes törvényekhez éppen a róla elnevezett két áramköri törvényt vette hozzá. A csomóponti törvényt pedig nem a naív kvázistacionárius alakjában (miszerint a csomópontokban az áramok összege zérus), hanem a kapacitáson tárolt töltést figyelembevéve kellett alkalmazni, ami pontosan megfelel a (5.18)-ról a (5.19)-re való áttérésnek. Az így felírt távíró egyenlet vezetett az elektromos jel véges (ideális esetben c -vel megegyező) terjedési sebességéhez. Ezután nem túl meglepő, hogy az elektromosság és mágnesség törvényeinek ezzel konzisztens módosítása az elektromágneses hatás véges (vákuumban c -vel megegyező) terjedési sebességéhez vezet, amint ezt a későbbiekben részletesen látjuk majd.

5.1.3. Potenciálok, mértékszabadság

Mivel $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, ezért továbbra is igaz, hogy egy vektorpotenciál rotációja:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (5.23)$$

Ha ezt visszaírjuk az \mathbf{E} egyenletébe

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}]. \quad (5.24)$$

Egy nulla rotációjú vektormezőt írhatunk gradiens alakjában:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\text{grad } \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (5.25)$$

vagyis a skalárpotenciál valamivel bonyolultabban jelentkezik az elektromos tér kifejezésében.

Ha ezeket visszaírjuk a Maxwell-egyenletekbe:

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{E} &= \Delta \Phi + \partial_t \nabla \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\text{rot } \mathbf{B} &= \Delta \mathbf{A} - \nabla(\nabla \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \partial_t \Phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy \mathbf{A} és Φ nem fizikai mennyiségek, csupán \mathbf{E} és \mathbf{B} azok. Emiatt ha olyan vektor- illetve skalárpotenciált választunk, amely ugyanazt az \mathbf{E} -t illetve \mathbf{B} -t adja, akkor ez ekvivalens az eredeti választással (mértékinvariancia, mértékszabadság). Időfüggő esetben \mathbf{A} -t továbbra is egy gradienssel lehet megváltoztatni, mert annak rotációja nulla, viszont az elektromos tér bonyolultabb kifejezése miatt a skalárpotenciál másképp változtatandó:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (5.27)$$

A mértéktranszformációval összeköthető \mathbf{A} és Φ terek ekvivalenciaosztályokat jelölnek ki az összes téren belül: ezek a mérték-orbitok (mérték-pályák). A mérték pályákhoz azonos fizika tartozik. Megtehetjük tehát azt, hogy a mérték orbitokból mindig kiválasztunk egy reprezentáns elemet (ami itt persze egy teljes $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, $\Phi(t, \mathbf{x})$ mező-konfigurációt jelenti). A kiválasztás módját nevezzük mértékrögzítésnek, az azt leíró egyenletet mértékfeltételnek vagy egyszerűen csak mértéknek. Nyilván olyan mértékrögzítést kell választani, amely minden mérték-orbitot csak egyszer metszi el². Vannak különösen jól bevált mértékek:

- Coulomb-mérték: itt előírjuk a $\text{div } \mathbf{A} = 0$ feltételt. Ez teljesíthető, hiszen ha $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$ eredetileg, akkor megkövetelve a $\text{div } \mathbf{A}' = 0$ -t kapjuk

$$0 = \text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \Delta \Psi \quad \Rightarrow \quad \Delta \Psi = -\text{div } \mathbf{A}, \quad (5.28)$$

amely egyenlet megoldható, pontosabban marad benne egy térben állandó de esetleg időfüggő konstans. Ebben az esetben a skalárpotenciál egyenlete ugyanaz mint a stacionárius esetben:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.29)$$

Ezzel a megoldással rögzítjük az időfüggő konstans értékét nullára.

Miután megvan a Φ értéke, visszaírva a második egyenletbe:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \Phi. \quad (5.30)$$

Itt a bal oldal divergenciája nulla, és ezzel konzisztens a jobb oldal is, hiszen $-\mu_0$ -at kiemelve:

$$\text{div} [\mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \nabla \Phi] = \text{div } \mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \Delta \Phi = \text{div } \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0 \quad (5.31)$$

a kontinuitási egyenlet miatt. Fogalmazhatunk úgy is, hogy \mathbf{J} -t felbontjuk transzverzális és longitudinális részre, hogy

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_\ell, \quad \nabla \mathbf{J}_t = 0, \quad \text{és} \quad \nabla \times \mathbf{J}_\ell = 0, \quad (5.32)$$

ekkor csak a transzverzális módus szerepelhet az előző egyenlet jobb oldalán:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_t. \quad (5.33)$$

²Ez néha nem is olyan egyszerű (Gribov-probléma).

- Lorentz-mérték (sugárzási mérték): ekkor azt követeljük meg, hogy

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (5.34)$$

Ebben az esetben mindkét egyenlet ugyanolyan alakot ölt:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.35)$$

Kérdés, hogy mindig található-e olyan Ψ , ami ezt teljesíti. A feltételt átalakítva:

$$\nabla \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi' = 0 = \nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (5.36)$$

vagyis olyan függvényt keresünk, amire

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\nabla \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi, \quad (5.37)$$

amiről belátható, hogy mindig van megoldása.

Láthatóan mindkét mértékben a tér- és időderiváltak egy kombinációja jelenik meg:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad (5.38)$$

ez a d'Alambert operátor. Ezzel

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.39)$$

5.1.4. Elektromágneses mező energiája

Ha mágneses tér is jelen van, akkor az energia kifejezése megváltozik. Mivel a mágneses tér létrehozásakor az indukció jelensége fontos, ezért nem hanyagolhatjuk el az időfüggést.

Az időfüggést felhasználva azonban az energia- és impulzuszmegmaradás egy más szemléletét kapjuk. Ehhez nézzük meg, hogy egy töltés mozgásakor mekkora teljesítményt kell leadnunk. A teljesítmény kifejezése általában $P_F = \mathbf{v} \mathbf{F}$, és ha az erő elektromágneses kölcsönhatásból származik, akkor

$$P_F = \mathbf{v} q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \mathbf{v} \mathbf{E} \Rightarrow P_F = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (5.40)$$

A tér felépítéséhez szükséges teljesítmény ennek ellentetje. Ezért

$$P = -P_F = - \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \Rightarrow p = -\mathbf{E} \mathbf{J} \quad (5.41)$$

teljesítmény-sűrűség definiálható. Ezt átírhatjuk a Maxwell egyenletek segítségével

$$-\mathbf{E} \mathbf{J} = \mathbf{E} (-\text{rot } \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (5.42)$$

Az első két tag teljes időderivált alakjában írható

$$\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B} = \partial_t w, \quad \delta w = \mathbf{E} \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \delta \mathbf{B} \quad (5.43)$$

Lineáris anyagokban:

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}) = \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2. \quad (5.44)$$

Az utolsó két tag teljes divergencia, hiszen definiálva

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.45)$$

Poynting-vektort, annak divergenciája előállítja a kívánt tagokat:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \partial_i \varepsilon_{ijk} (E_j H_k) = H_k \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j - E_j \varepsilon_{jik} \partial_i H_k = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (5.46)$$

Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\partial_t w + \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{J}\mathbf{E} = 0. \quad (5.47)$$

A teljes térre integrálva a divergencia nem ad járulékot, azaz

$$\partial_t \int d^3\mathbf{x} w = \int d^3\mathbf{x} (-\mathbf{J}\mathbf{E}) = P, \quad (5.48)$$

vagyis a w integrálja az elektromágneses tér energiájaként értelmezhető, w maga ezért az energiasűrűség. Valóban, külön-külön már találkoztunk ennek a kifejezésnek a tagjaival (l. (2.130) és (4.15)).

Emiatt (5.47) az energia megmaradását fejezi ki mérlegegyenlet formájában. Ilyen módon a \mathbf{S} Poynting vektor is fizikai értelmet nyer, ez képviseli az energia-áramsűrűséget, azaz $\partial_t w + \operatorname{div} \mathbf{S}$ együtt az elektromágneses tér energiájának mérlegegyenletét adja. Az utolsó tagot ($\mathbf{J}\mathbf{E}$) vagy forrásnak tekintjük, vagy az elektromágneses térben mozgó áramok teljesítménysűrűségének értelmezve az energia anyaghoz kötött részét képviseli.

Érdekesség: Itt is megtehetjük azt, hogy a tér forrását, azaz az áramsűrűséget rögzítjük, és az anyagot változtatjuk. Vonjuk ki az anyag jelenlétében érvényes energiát az anyag nélkül érvényes energiából. Mivel a források ugyanazok:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \delta t = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{J}_0 \mathbf{E} - \mathbf{J}\mathbf{E}_0) \delta t. \quad (5.49)$$

Beírva a $\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}$ kifejezést, ugyanazt kell végrehajtani, mint fent:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \delta \mathbf{B} - \mathbf{H} \delta \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \delta \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{D}). \quad (5.50)$$

Lineáris anyagban

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}). \quad (5.51)$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ és $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, kapjuk

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{M} \mathbf{B}_0 - \mathbf{P} \mathbf{E}_0). \quad (5.52)$$

A második tag ismerős, az első a mágneses anyag járuléka. De ne felejtjük el, hogy ha az áramhurkok rögzítettek, akkor változó mágneses tér feszültséget indukál, ami csökkenteni igyekszik az áramokat. Vagyis kívül is munkát kellett végezni az áramok fenntartása érdekében. Ezért a mágneses rendszer inkább a konstans potenciálban mozgatott dielektrikum példájával analóg.

5.1.5. Elektromágneses mező impulzusa

Hasonló módon járhatunk el az impulzusváltozásnál is: ha egy próbatöltést helyezünk elektromágneses térbe, akkor a rá ható erő a Lorentz erő:

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (5.53)$$

Az erő az impulzusváltozás forrása, ugyanolyan szerepet játszik, mint a teljesítmény az energiánál. Ezért megpróbálhatjuk kifejezni az elektromágneses tér impulzus mérlegegyenletét.

Átalakítva a jobb oldalt

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= \partial_t (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{D} + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= -\partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Az első tag teljes időderivált és bevezetve

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (5.55)$$

ami az impulzus sűrűségként azonosítható. Az impulzus mérlegegyenlete így

$$\partial_t g_i + \partial_j T_{ij} = -(\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_i. \quad (5.56)$$

Kérdés, hogy miként értelmezhető a T_{ij} tenzor. Ha elvégezzük a következő átalakítást

$$(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i = E_i \partial_j D_j - \varepsilon_{kij} D_j \varepsilon_{klm} \partial_\ell E_m = E_i \partial_j D_j - D_j \partial_i E_j + D_j \partial_j E_i = \partial_j \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} \delta_{ij} \right), \quad (5.57)$$

illetve megismételjük ugyanezt \mathbf{B} -re és \mathbf{H} -ra, akkor

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H}) \delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j, \quad (5.58)$$

ami a *Maxwell feszültség tenzor*. A mérlegegyenlet értelmezéséhez integráljuk ki a teljes térre:

$$\partial_t \int d^3x g_i + \int d^3x (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = \partial_t \int d^3x (\mathbf{P}_{\text{mező}} + \mathbf{P}_{\text{mech}})_i = - \oint df^i T_{ij} n_j \quad (5.59)$$

Az elektromágneses mezőnek tehát van $\mathbf{P}_{\text{mező}}$ impulzusa is és képes a \mathbf{P}_{mech} tagon keresztül erőt kifejteni az anyagra, ami a kísérletileg is kimérhető fénynyomáshoz vezet.

5.2. Elektromágneses hullámok vákuumban

5.2.1. Elektromágneses hullámok

Most tekintsük a Maxwell-egyenleteket teljes időfüggésükkel. Mint láttuk, ilyenkor a konstitúciós relációk lineáris közelítése a legtöbb anyag esetén megfelelő lesz. Ekkor részlegesen homogén közegekben ugyanazok az egyenletek igazak, mint vákuumban, így az elektrodinamika összes egyenlete hasonló szerkezetű lesz:

$$\square \Psi = -f. \quad (5.60)$$

Lorentz mértékben a potenciálok minden komponensére, Coulomb mértékben a vektorpotenciálra, adott forrás esetén az \mathbf{E} és \mathbf{B} komponenseire ez az egyenlet lesz igaz. A d'Alambert operátorban levő konstans lineáris közelítés esetén

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}, \quad (5.61)$$

n a törésmutató. A legtöbb anyagra, amelyben a fény terjedni képes, $\mu_r \approx 1$ jó közelítés. Ezért a törésmutató vizsgálatánál használhatjuk a $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ képletet.

A fenti egyenlet inhomogén lineáris másodfokú parciális differenciálegyenlet. Az általános megoldás két rész összege

- a homogén rész ($f = 0$) általános megoldása
- az inhomogén rész egy partikuláris megoldása.

Most kezdjük a homogén egyenlet vizsgálatát, azaz

$$\square\Psi = 0. \quad (5.62)$$

Az egyenletet oldjuk meg Fourier analízis segítségével. A keresett függvény Fourier-transzformáltja:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Psi(\omega, \mathbf{k}), \quad \Psi(\omega, \mathbf{k}) = \int dt \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (5.63)$$

Ezt behelyettesítve:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \Psi(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (5.64)$$

aminek az általános megoldása:

$$\Psi(\omega, \mathbf{k}) = a(\mathbf{k})2\pi\delta(\omega - kc) + b(\mathbf{k})2\pi\delta(\omega + kc). \quad (5.65)$$

Ha ezt vissza transzformáljuk akkor az általános megoldás:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(a(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b(\mathbf{k})e^{i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right), \quad \text{ahol} \quad \omega_k = kc. \quad (5.66)$$

Mivel Ψ valós ($\Psi^*(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x})$), ezért

$$a^*(-\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) \Rightarrow \Psi(t, \mathbf{x}) = 2 \operatorname{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a_0(\mathbf{k}) \cos(-\omega_k t + \mathbf{k}\mathbf{x} + \phi_{\mathbf{k}}), \quad (5.67)$$

ahol $2a(\mathbf{k}) = a_0 e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$.

5.2.2. Csoport- és fázissebesség

A fenti megoldás síkhullámok összegét írja le. Feledkezzünk meg egy időre arról, hogy $\omega_k = ck$, hogy a tárgyalás a későbbiekre is érvényes legyen.

Tekintsünk egyetlen módot először (monokromatikus síkhullám). Ebben a valódi, valós megoldás alakja

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} + \varphi), \quad (5.68)$$

ahol a és ϕ paramétereket a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ez a megoldás haladó síkhullámot ír le. A megoldás időben és térben is periodikus. Egy $t = t_0$ -n kiválasztott \mathbf{x}_0 ponttal azonos fázisban levő pontok halmazának elemei:

$$\omega t_0 - \mathbf{k}\mathbf{x}_0 + \varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} + \varphi + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (5.69)$$

Ebből

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (t - t_0)v_f \hat{\mathbf{k}} + \lambda n \hat{\mathbf{k}} + \beta \hat{\mathbf{k}}_{\perp}, \quad v_f = \frac{\omega_k}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \mathbf{k}\mathbf{k}_{\perp} = 0. \quad (5.70)$$

$t = t_0$ -nál tehát \mathbf{x}_0 -lal azonos fázisban van a \mathbf{k} -ra merőleges sík (hullámfront), valamint ennek λ -val való eltoltjai (hullámhossz). Az idő előrehaladtával a hullámfrontok $\hat{\mathbf{k}}$ irányában v_f sebességgel haladnak tovább, vagyis ez az azonos fázisú pontok sebessége, a *fázissebesség*. Vákuumban $v_f = c =$ állandó. Miután az elektromágneses hullámokat a fényvel azonosítjuk, ezért a fázissebesség a fénysebesség.

Monokromatikus síkhullámnál igaz, hogy

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(0, \mathbf{x} - v_f t \hat{\mathbf{k}}), \quad (5.71)$$

azaz a hullámalak csak eltolódik, nem deformálódik. Általános $a(\mathbf{k})$ esetén ez nem lesz így, a hullám gyorsan összekuszálódik. Viszont ha azonos irányú síkhullámokat teszünk össze, akkor a hullámterjedés irányát tekintve x iránynak írhatjuk

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i\omega_k t + ikx}. \quad (5.72)$$

Tegyük fel, hogy azon a tartományon, ahol $a(k) \neq 0$, ott ω_k lassan változik. Ekkor sorba fejthetjük valami közepes k_0 körül:

$$\omega_k = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots \quad (5.73)$$

Bevezetjük a *csoportsebességet* a következő képlettel:

$$v_{cs} = \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad (5.74)$$

ekkor

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i(\omega_0 + (k - k_0)v_{cs})t + ikx} = e^{-i(\omega_0 - k_0 v_{cs})t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-ikv_{cs}t + ikx} = \\ &= e^{-i\omega_0(1 - v_{cs}/v_f)t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(x - v_{cs}t)} = e^{-i\omega_0(1 - v_{cs}/v_f)t} \Psi(0, x - v_{cs}t). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Láthatóan egy fázisfaktor erejéig megmarad a hullám alakja. Ezért beszélhetünk hullámcsomagról, amely a burkolóját megtartva stabilan halad előre az időben v_{cs} sebességgel, ez indokolja a csoportsebesség elnevezést. Általában $v_{cs} \neq v_f$, kivéve, ha ω_k lineáris k -ban, mint a vákuumbeli fényterjedésnél. A fázisfaktor előtagban a fázis változása arányos $1 - v_{cs}/v_f$ -vel, vagyis nulla, ha $v_{cs} = v_f$. Ennek jelentése: a burkoló alatt az elemi hullámok v_f sebességgel haladnak előre.

Információ küldésekor mindig hullámcsomagot kell előállítani, hiszen végtelen síkhullámban nincs semmi szerkezet. Emiatt az információtovábbítás sebessége v_{cs} . Előfordulhat bizonyos esetekben, hogy ezek a sebességek nagyobbak a fénysebességnél, ez azonban csak annak a jele, hogy ott nem használhatók ezek a fogalmak.

Ha a fázissebességet a fénysebességből a törésmutatóval képezzük, amelynek ismerjük a frekvenciafüggését:

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c}. \quad (5.76)$$

Ekkor a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \frac{\omega}{2n} \frac{d\varepsilon_r}{d\omega}}. \quad (5.77)$$

5.2.3. Síkhullámok

Coulomb mértékben, végtelen térben

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0 \Rightarrow \Phi = 0 \\ \square\mathbf{A} &= 0 \Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{A}_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (5.78)$$

A Coulomb mértékben $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, ebből

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0. \quad (5.79)$$

Egy monokromatikus komponensre

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{A} = i\omega\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, & \mathbf{E}_0 &= i\omega\mathbf{A}_0, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot}\mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, & \mathbf{B}_0 &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0.\end{aligned}\quad (5.80)$$

Tehát monokromatikus síkhullámban $\hat{\mathbf{k}}$, \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 egymásra merőlegesek. Hogy \mathbf{k} merőleges \mathbf{E}_0 -ra és \mathbf{B}_0 -ra, azt közvetlenül a $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ és $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ egyenletből is látni lehet.

A homogén Maxwell-egyenleteknek van egy érdekes szimmetriája. Ha (5.22) egyenletet nézzük lineáris anyagban, akkor észrevehetjük, hogy a $\mathbf{E} \rightarrow -c\mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}/c$ (vagy $\mathbf{E} \rightarrow -c^2\mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$) helyettesítésre ugyanazok maradnak a függvényalakok. Ezt a leképzést dualitási transzformációnak nevezzük.

A $\hat{\mathbf{k}}$ -ra merőleges alter két dimenziós. Emiatt felvehetünk egy ortonormált bázist $\{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, és írhatjuk

$$\mathbf{E} = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (5.81)$$

$\mathbf{e}_{1,2}$ a polarizációs vektorok; legyen $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, ekkor $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$. Együtthatóik, $\alpha_{1,2}$ lehetnek komplex mennyiségek is, amely a kétfajta polarizációjú síkhullám különböző fázisát jelentik. Valóban, az igazi térerősség a fenti mennyiség valós része, azaz $\alpha_i = E_i e^{i\varphi_i}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_1\mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) + E_2\mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2) \\ \mathbf{B} &= \frac{E_1}{c}\mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) - \frac{|E_2|}{c}\mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (5.82)$$

Adott \mathbf{x} pontban az (E_1, E_2) két dimenziós vektor egy görbét rajzol ki az idő előrehaladtával. Ha $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor ez egy egyenes, ekkor lineárisan polarizált fényről beszélünk; ha $\varphi_1 = \varphi_2 \pm i\pi/2$, akkor a görbe kör, a fény cirkulárisan polarizált. Általános esetben ellipszist kapunk, a fény elliptikus polarizációjáról beszélünk.

A hullám energiasűrűsége:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\mathbf{E}^2 + (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^2 \right] = \varepsilon_0\mathbf{E}^2 = \varepsilon_0 (E_1^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) + E_2^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2)). \quad (5.83)$$

Egy periódusra átlagolva

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_1^2 + E_2^2). \quad (5.84)$$

A Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c\mu_0}\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{c\mu_0}\mathbf{E}^2. \quad (5.85)$$

Az energia-áram iránya tehát a hullám iránya, nagysága pedig

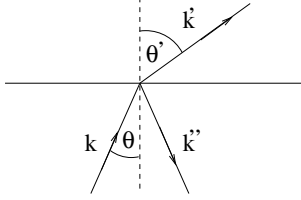
$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{c\mu_0\varepsilon_0} \varepsilon_0\mathbf{E}^2 = cw. \quad (5.86)$$

Vagyis az energiaáram-sűrűség és az energiasűrűség viszonya ugyanolyan mint a részecskék esetén az áramsűrűség és a töltéssűrűségé, $\mathbf{J} = \mathbf{v}\rho$. Emiatt a hullámra gondolhatunk úgy is, mint részecskék áramára, ez a foton-kép alapja. Az interferencia jelensége miatt azonban mindig megfontoltan kell alkalmazni ezt az azonosítást.

Függelék: Elektromágneses hullámok közeg határán

Homogén közegek határán ki kell elégíteni a határfeltételeket:

$$D_n, B_n, \mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t \text{ folytonosak.} \quad (5.87)$$



5.3. ábra. Hullám közeghatáron

Tekintsünk egy síkhullámot, amely egy \mathbf{n} normálisú sík közeghatárra érkezik (5.3): ahonnan érkezik, ott ε , ahova ott ε' legyen a permittivitás. Az eredmény három hullám összege lesz: a beeső hullám mellett egy átmenő (megtört) és egy visszavert hullámé. Legyen a beeső hullám

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (5.88)$$

A határfeltételek minden időpontban való érvényessége miatt a megtört és a visszavert hullámra is $e^{-i\omega t}$ az időfejlődés. A megtört hullám jellemzői legyenek \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{k}' , a visszavert hullámra \mathbf{E}'' , \mathbf{B}'' , \mathbf{k}'' . A beeső hullám szögét $\hat{\mathbf{k}}\mathbf{n} = \cos \theta$, a megtört hullámét pedig $\hat{\mathbf{k}}'\mathbf{n} = \cos \theta'$ adja. Jelölje továbbá a két közegben a fény terjedési sebességét c és c' .

Mivel a határfeltételeknek nemcsak időtől függetlenül, hanem a határsík minden pontjában is fenn kell állnia, ezért ha egy \mathbf{x}_0 referenciapontban összeillesztjük a határfeltételeket, akkor a felület minden \mathbf{x} pontjában akkor állnak fenn, ha

$$\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{k}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{k}''(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (5.89)$$

Ez azt jelenti, hogy a hullámszámvektorok felülettel párhuzamos komponense meg kell egyezzen. Ebből egyfelől következik, hogy a három hullám egy síkban van, másfelől mivel \mathbf{k} és \mathbf{k}'' hossza ugyanaz, ezért a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel. A tört hullámra pedig

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' \Rightarrow \frac{\omega}{c} \sin \theta = \frac{\omega}{c'} \sin \theta' \quad (5.90)$$

Ebből következik a

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'} = \frac{n'}{n} \quad (5.91)$$

Snellius-Descartes törvény, ahol n és n' a közegek törésmutatói.

Koordinátázzuk a rendszert úgy, hogy $\hat{\mathbf{e}}_z \parallel \mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}}' = \begin{pmatrix} \sin \theta' \\ 0 \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}}'' = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

A polarizációhoz érdemes a feladat geometriájához illeszkedő bázist választani:

$$1.) \quad \mathbf{E}\mathbf{n} = 0, \quad 2.) \quad \mathbf{E} \in \{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{n} \text{ sík}\} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{n} = 0. \quad (5.93)$$

Ezek a feltételek igazak maradnak a megtört és visszavert hullámra is.

1. Itt $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \hat{\mathbf{k}}$, azaz felhasználva a $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$ összefüggést

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{E}'_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ E'_0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{E}''_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ E''_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} & \mathbf{B}'_0 &= \frac{E'_0}{c'} \begin{pmatrix} -\cos \theta' \\ 0 \\ \sin \theta' \end{pmatrix} & \mathbf{B}''_0 &= \frac{E''_0}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.94)$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} D_n &= \text{folyt.} & & \text{---} \\ \mathbf{E}_t &= \text{folyt} & E_0 + E''_0 &= E'_0 \\ B_n &= \text{folyt.} & \frac{1}{c}(E_0 + E''_0) \sin \theta &= \frac{1}{c'} E'_0 \sin \theta' \\ \mathbf{H}_t &= \text{folyt} & \frac{1}{c\mu}(E_0 - E''_0) \cos \theta &= \frac{1}{c'\mu'} E'_0 \cos \theta'. \end{aligned} \quad (5.95)$$

A B_n illetve \mathbf{E}_t egyenletekből következik

$$\frac{1}{c} \sin \theta = \frac{1}{c'} \sin \theta' \quad \Rightarrow \quad n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (5.96)$$

ami a már levezetett Snellius-Descartes törvény. A két egyenlet közül ezért az egyik elhagyható, ezt választhatjuk a B_n egyenletnek. A másik kettőből megkapható a térerősségekre a megoldás

$$E''_0 = E_0 \frac{\mu' c' \cos \theta - \mu c \cos \theta'}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}, \quad E'_0 = E_0 \frac{2\mu' c' \cos \theta}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}. \quad (5.97)$$

2. Ebben az esetben \mathbf{B} teljesen transzverzális, azaz a felírandó egyenletek

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(B_0 + B''_0) &= \frac{1}{\mu'} B'_0 \\ (E_0 - E''_0) \cos \theta &= E'_0 \cos \theta' \\ \varepsilon(E_0 + E''_0) \sin \theta &= \varepsilon' E'_0 \sin \theta'. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Az első és utolsó egyenlet összehasonlításából most is a Snellius-Descartes törvény következik, így az utolsó egyenlet elhagyható. Az első egyenletet az elektromos térerősségekre átírva

$$\frac{1}{\mu c}(E_0 + E''_0) = \frac{1}{\mu' c'} E'_0$$

a megoldás:

$$E''_0 = E_0 \frac{\mu c \cos \theta - \mu' c' \cos \theta'}{\mu c \cos \theta + \mu' c' \cos \theta'}, \quad E'_0 = E_0 \frac{2\mu' c' \cos \theta}{\mu c \cos \theta + \mu' c' \cos \theta'}. \quad (5.99)$$

Formálisan a $\mu \rightarrow \varepsilon$ helyettesítéssel adódik az előző eredményből, ami a forrásmentes Maxwell egyenletek dualitásának következménye.

A megoldásból következő tanulságok:

- $n' < n$ esetén $\sin \theta' > \sin \theta$, vagyis van olyan θ_0 , amelyre nincs megoldás, azaz nincs megtört fény: $\sin \theta_0 = n'/n$. Ennél nagyobb beesési szögek esetén a hullám teljes egészében visszaverődik.

- A 2. esetet egyszerűsítsük azzal a feltevéssel, hogy a két közegre nagyon jó közelítéssel $\mu = \mu'$ (ez széles körben igaz: tipikus para/diamágneses közeg szuszceptibilitása 10^{-5} nagyságú vagy még kisebb). A beesési szöveget megfelelően választva elérhető, hogy $E_0'' = 0$ legyen. Ennek feltétele

$$c \cos \theta = c' \cos \theta' \Rightarrow \tan \theta = \frac{n'}{n}. \quad (5.100)$$

Ez a Brewster-szög, ekkor a visszavert hullám a felülettel párhuzamosan polarizált.

Kérdés: mi a helyzet az 1. esetben?

5.3. Megoldás forrás jelenlétében

5.3.1. Hullám-egyenlet Green-függvénye

A megoldandó egyenlet tehát $\square\Psi = -f$. Ahogyan sztatikában is tettük, az általános forrás helyett áttérünk a pontforrásra:

$$\square_x G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Rightarrow \psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') f(t', \mathbf{x}'). \quad (5.101)$$

A G megoldást itt is Green-függvénynek hívjuk. Ahogyan korábban is, a jobb oldal $t - t'$ illetve $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ függése miatt $G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Hogy G -t meghatározzuk, végezzünk időbeli Fourier transzformációt. Fizikailag egy időben pontszerű forrás helyett egy oszcilláló forrás terét számítjuk ki. Mivel $\delta(t) \rightarrow 1$, valamint $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$, ezért

$$(\Delta + k^2)G(\omega, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}), \quad \omega = kc. \quad (5.102)$$

A $\Delta + k^2$ kifejezést nevezik *Helmholtz operátornak*.

A jobb oldal, valamint a határfeltételek is forgásinvariánsak, ezért G is az lesz, azaz gömbi koordinátarendszerben felírva csak r -től fog függeni. Ezt felhasználva térjünk át gömbi koordinátarendszerre, és tekintsük egyelőre az $r \neq 0$ esetet:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2 G = 0, \quad \text{ha } r \neq 0. \quad (5.103)$$

Ez másodrendű differenciálegyenlet, megoldásai³

$$G_{R/A}(\omega, r) = C \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (5.104)$$

Az arányossági tényezőhöz a forrást kell figyelembe venni. Integráljuk a $\Delta G = -k^2 G - \delta(\mathbf{x})$ egyenletet egy gömbre a Gauss tétel segítségével. A bal oldal integrálja:

$$\int_V d^3\mathbf{x} \Delta G = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \nabla G = 4\pi R^2 \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = 4\pi C (\pm ikR - 1) e^{\pm ikR}. \quad (5.105)$$

A jobb oldalé pedig:

$$\int_V d^3\mathbf{x} (-k^2 G - \delta(\mathbf{x})) = -4\pi k^2 \int_0^R dr r^2 G(r) - 1 = -4\pi C k^2 \int_0^R dr r e^{\pm ikr} - 1 = 4\pi C \left[1 + (\pm ikR - 1) e^{\pm ikR} \right] - 1. \quad (5.106)$$

³Valójában elég lenne egy partikuláris megoldás, de a kényelem, és a fizikai interpretáció miatt megtartjuk mindkét megoldást most.

Innen $C = 1/(4\pi)$, független a k -tól. Valójában ezt várjuk is, mert a $r \rightarrow 0$ határértékben az egyenlet a Poisson-egyenletre egyszerűsödik, mivel $kr \ll 1$, vagyis az elektrosztatika Green-függvényét kell visszakapnunk. Emiatt:

$$G_{R/A}(\omega, r) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}. \quad (5.107)$$

Hogy a valós időbeli megoldást is megkapjuk, vissza kell Fourier transzformálnunk a megoldást:

$$G_{R/A}(t, r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{\pm i\omega r/c} = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right). \quad (5.108)$$

Vagyis az eredeti Green-függvények alakja:

$$G_{R/A}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right). \quad (5.109)$$

A megoldás pedig:

$$\Psi_{R/A}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) f(t', \mathbf{x}') = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f\left(t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right). \quad (5.110)$$

Rögtön megfigyelhetjük, hogy ha a forrás időfüggetlen, akkor a sztatika eredményét kapjuk vissza.

5.3.2. Fizikai értelmezés

Vegyük most azt a nem fizikai példát, mikor a pontforrásunk csak egyetlen pillanatra, egyetlen helyen villan fel egységnyi erősséggel, azaz $f(t, \mathbf{x}') = \delta(t)\delta(\mathbf{x}')$. Ekkor

$$\Psi_R(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (5.111)$$

Ez a megoldás csak $t > 0$ -ra nem nulla, és ott is csak egy $r = ct$ gömbfelületen: azaz egy kifutó gömbhullámfrontot kapunk. Mivel r -be csak késve érkezik a felvillanó forrás jele, ezért azt a megoldást késő, *retardált* megoldásnak hívjuk, és G_R neve retardált Green-függvény. Hogy a sztatikához hasonló képletet kapjunk, jelölhetjük

$$[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret} = f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right) \Rightarrow \Psi_R(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.112)$$

Ha egy forrás $t > 0$ -n üzemel, és megadjuk a kezdeti feltételeket, akkor a megoldás

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5.113)$$

ahol a $\Psi_0(t, \mathbf{x})$ olyan szabad megoldás, amely a $t = 0$ pontban a kezdeti feltételeket szolgáltatja.

Ha ugyanezt az A Green-függvénnyel akarom megcsinálni a felvillanó pontforrásra a következő megoldást kapjuk:

$$\Psi_A(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t + \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (5.114)$$

Ez a megoldás $t > 0$ -ra nulla, és $t < 0$ -ra is csak egy $r = -ct$ gömbfelületen különbözik nullától. Ezért egy befutó gömbhullámfrontot kapunk. A megoldás megelőzi a forrás felvillanását, ezért ezt a megoldást előrehozott, *avanzsált* megoldásnak, a G_A Green függvényt avanzsált Green-függvénynek hívjuk. Az értelmezés: ha egy forrás $t < t_0$ -ig üzemel, és megadjuk a tér értékét $t = t_0$ -nál, akkor a korábban mérhető tér:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \Psi_A(t, \mathbf{x}). \quad (5.115)$$

5.4. Töltésrendszerek sugárzása

5.4.1. Lokalizált, oszcilláló töltések tere

Elektrodinamikában, Lorentz mértékben, ha kezdetben a potenciálok $\Phi = \mathbf{A} = 0$ voltak, akkor a retardált megoldások

$$\begin{aligned}\square\Phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \square\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\end{aligned}\quad (5.116)$$

Legyen most $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$. A töltésmegmaradás mérlegegyenlete miatt $\rho \sim e^{-i\omega t}$, és így minden megoldás $\sim e^{-i\omega t}$. Ekkor az időderivált helyettesíthető $-i\omega$ szorzóval.

Lorentz mérték esetén

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{-i\omega}{c^2} \Phi \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{-ic^2}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}). \quad (5.117)$$

Ezért elég csak a vektorpotenciált meghatározni, mégpedig a (5.116) képlet alapján:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.118)$$

Tegyük fel, hogy a forrás mérete jóval kisebb, mint a hullámhossz $d \ll \lambda$, ellenkező esetben az egyes töltések sugárzását külön kell kezelni. Ha emellett $r \ll \lambda$ (közelzóna), akkor első közelítésben elhanyagolhatjuk a retardálást, és a kvázistacionárius esetet kapjuk vissza. Ahogyan $r \rightarrow \lambda$, egyre bonyolultabb lesz a tér.

$r \gg \lambda$ esetben (távolzóna, hullámzóna vagy sugárzási zóna) a megoldás ismét leegyszerűsödik. Itt ugyanis elég csak azokat a tagokat megtartani, amelyek $r \rightarrow \infty$ esetén nem tűnnek el. A nevezőben csak a vezető tagot kell megtartani:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{r^2}\right). \quad (5.119)$$

Az exponensben azonban

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 + \mathbf{x}'^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'} = r\sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) = r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) \quad (5.120)$$

kifejtés miatt az elsőrendű tagot is meg kell tartjuk, hiszen még végtelen távol is megfigyelhető szerepe van. Ekkor

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik(r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}. \quad (5.121)$$

Az r -függő tag egy kifutó gömbhullámot ír le, amelynek irányfüggése lesz az integrál miatt⁴. A gömbhullám irányfüggő amplitúdója:

$$\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}. \quad (5.122)$$

Hogy az elektromos illetve mágneses tereket megkapjuk, deriválni kell a vektorpotenciált. Mivel az $1/r^2$ tagokat elhagyjuk, a deriválás csak az exponensre hat, azaz

$$\partial_j e^{ikr} = ik\hat{x}_j e^{ikr} \Rightarrow \nabla \rightarrow ik\hat{\mathbf{x}}, \quad (5.123)$$

⁴Bár itt $\mathbf{A}(r) \sim 1/r$, ez azonban nem a monopólusok jelenlétét mutatja, hanem a sugárzás jele.

a deriválás helyettesíthető egy vektorral. Emiatt

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}})) \quad (5.124)$$

Az elektromos tér a rot $\mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c^2$ miatt:

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (5.125)$$

ahol bevezettük a Z_0 vákuum-impedancia fogalmát; értéke

$$Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega. \quad (5.126)$$

A Poynting vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0 (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 \Rightarrow S = Z_0 H^2. \quad (5.127)$$

Az időfüggéshez a terek valós részét kell venni, vagyis $S \sim \cos^2 \omega t$. Időátlagban

$$S = \frac{Z_0}{2} H^2 = \frac{Z_0 \omega^2}{32\pi^2 c^2} \frac{|\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}})|^2}{r^2}. \quad (5.128)$$

Sugárzások esetén szokták a sugárzás teljesítmény-áramsűrűségét, azaz a Poynting vektor nagyságát *intenzitásnak* nevezni, ezt I -vel is jelölik.

Látható módon a Poynting vektor a távolsággal fordított arányban csökken. Ez azonban azt jelenti, hogy ha egy adott *térszögbe* kisugárzott teljesítményt (intenzitást) nézzük, akkor távolságfüggetlen eredményt kapunk. Ugyanis egy r távolságban levő $d\Omega$ látszólagos térszögbe eső felület nagysága $r^2 d\Omega$, így kiesik az r^2 :

$$dP = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}} r^2 d\Omega \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}} r^2. \quad (5.129)$$

Most tehát

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^2}{32\pi^2 c^2} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}})|^2. \quad (5.130)$$

5.4.2. Elektromos dipólussugárzás

Az exponensben szereplő $k|\mathbf{x}'| < kd$, azaz itt még sorba fejthetünk:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') (1 - ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \dots). \quad (5.131)$$

Ha a forrás mérete jóval kisebb, mint a hullámhossz, akkor elég (5.131) első tagját megtartani:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (5.132)$$

A sztatikában ez a tag eltűnik, itt azonban

$$\int d^3 \mathbf{x} J_i = \int d^3 \mathbf{x} J_j \partial_j x_i = - \int d^3 \mathbf{x} x_i \partial_j J_j = \int d^3 \mathbf{x} x_i \partial_t \varrho = \partial_t p_i = -i\omega p_i, \quad (5.133)$$

ahol p_i a dipólmomentum. Innen

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{p}, \quad (5.134)$$

azaz

$$\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) = -i\omega \mathbf{p}. \quad (5.135)$$

A kialakuló mező tehát arányos a rendszer dipólmomentumával, pontosabban – az ω szorzó jelenléte miatt – annak változásával. Emiatt ezt a tagot *dipólsugárzásnak* nevezzük, és fenti eredményeinkalapján a térerősségek

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{k\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) = \frac{\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \quad (5.136)$$

valamint

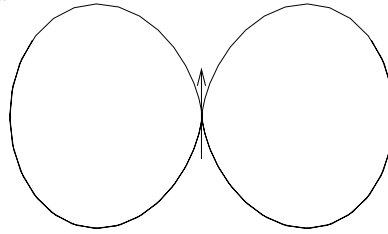
$$\mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} = \frac{Z_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (5.137)$$

A kisugárzott teljesítmény pedig szögeloszlása pedig

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0}{32\pi^2 c^2} \omega^4 p^2 \sin^2 \theta, \quad (5.138)$$

ahol θ a \mathbf{p} dipólus és a kimenő $\hat{\mathbf{x}}$ által bezárt szög.

A fenti eredmény szemléletes ábrázolásához polárkoordináta-rendszert szoktak használni, és felveszik az $(R(\theta), \theta)$ görbét, ahol a sugár $R(\theta) = \frac{dP}{d\Omega}$. Ezt a görbét láthatjuk a következő ábrán:



A teljes kisugárzott intenzitás (teljesítmény)

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}. \quad (5.139)$$

Mivel

$$\int d\Omega \sin^2 \theta = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) = \frac{8\pi}{3}, \quad (5.140)$$

ezért

$$P = \frac{Z_0}{12\pi c^2} \omega^4 p^2. \quad (5.141)$$

Láthatóan a kisugárzott teljesítmény $\sim \omega^4$, azaz csak nagy frekvenciákon lehet jelentős.

Feladat: Középen táplált d hosszúságú egyenes antenna sugárzása.

Megoldás: A „középen táplált” megnevezés azt jelenti, hogy középen csatlakoztatjuk az egyenes antennát a feszültségforráshoz, amit most áramforrásként veszünk figyelembe. Emiatt középen az áram nagysága adott, periodikusan változik. Az antenna legvégén persze nem tud hova folyni az áram, ott tehát az áramerősség nulla. A legegyszerűbb interpoláló függvényt felvéve feltesszük, hogy az árameloszlás az antenna mentén lineáris:

$$I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right). \quad (5.142)$$

Ekkor

$$\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} dz I(t, z) = 2I_0 \mathbf{e}_z e^{-i\omega t} \int_0^{d/2} dz \left(1 - \frac{2z}{d}\right) = \frac{I_0 d}{2} \mathbf{e}_z e^{-i\omega t}. \quad (5.143)$$

Mivel (5.133) alapján az áramsűrűség integrálja $-i\omega \mathbf{p} e^{-i\omega t}$, innen $\mathbf{p} = \frac{iI_0 d}{2\omega} \mathbf{e}_z$. Az i fázistolást jelent a képletben. Emiatt a kibocsátott sugárzás intenzitása

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^4}{32\pi^2 c^2} \frac{I_0^2 d^2}{4\omega^2} \sin^2 \theta = \frac{Z_0 (kd)^2}{128\pi^2} I_0^2 \sin^2 \theta. \quad (5.144)$$

A teljes kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{Z_0 (kd)^2}{48\pi} I_0^2 = \frac{1}{2} R_{sug} I_0^2, \quad \text{ahol} \quad R_{sug} = \frac{Z_0 (kd)^2}{24\pi} \approx 5(kd)^2 \Omega. \quad (5.145)$$

Vagyis az antenna áramkörü szempontból egy ellenállásként viselkedik, amely frekvenciafüggő. Ezt nevezik az antenna sugárzási ellenállásának.

5.4.3. Larmor-formula

Ha egyetlen mozgó ponttöltésünk van, aminek a sebessége $v \ll c$, akkor $\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t))$, amit (5.116)-be helyettesítve:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \mathbf{v}(t - r/c). \quad (5.146)$$

A sugárzás számításánál a vezető $1/r$ tagot akarjuk megtartani. Ezért a deriválásoknál az $1/r$ -t nem bántjuk, vagyis csak a retardálás miatt lehet értéke a térderiváltaknak is:

$$\nabla f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \nabla\left(t - \frac{r}{c}\right) \partial_t f\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{c} \partial_t f\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (5.147)$$

Ezért a mágneses indukció

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r c} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \Big|_{t-r/c}. \quad (5.148)$$

Az elektromos térerősséghez vegyük észre, hogy az oszcilláló töltésrendszerekre (5.125) alatt levezetett összefüggés nem tartalmazza expliciten a frekvenciát, így bármilyen időfüggésre fennáll:

$$\mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} \Big|_{t-r/c}. \quad (5.149)$$

Ebből a sugárzás Poynting vektora:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 = \hat{\mathbf{x}} \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta, \quad (5.150)$$

és innen megkaphatjuk a kisugárzott teljesítményt a térszög függvényében (l. (5.129)):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta. \quad (5.151)$$

A teljes kisugárzott teljesítményt pedig a

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2 \quad (5.152)$$

Larmor képlet írja le, a v/c kifejtés vezető rendjében. Ez a képlet teljesen analóg a (5.141) képlettel, hiszen ha $p = qx_0 e^{-i\omega t}$ alakú, akkor $\omega^2 p \sim \partial_t^2 p \sim qa$, és ennek a négyzetét tartalmazza (5.141). A 2-es faktor különbség a periódusra vett átlagolás következménye.

A kezdeti $v \ll c$ feltételre abból is lehet következtetni, hogy (5.141) akkor volt érvényes, ha a forrás mérete $d \ll \lambda$. Ponttöltésre d az egy periódus alatt a részecske által megtett távolságnak feleltethető meg:

$$\frac{d}{T} = v \ll \frac{\lambda}{T} = c \Rightarrow v \ll c. \quad (5.153)$$

5.5. Szórás

5.5.1. Hatáskeresztmetszet

A sugárzás eddigi vizsgálatát leírhatjuk úgy, hogy először a forrásmentes sugárzást néztük, aztán megértettük, hogy a sugárzás forrása a gyorsuló töltés. Itt tovább mehetünk, és megkérdezhetjük, miért gyorsul a töltés? Ennek egy lehetséges oka az, hogy elektromágneses hullám tere gyorsítja. Vagyis ekkor egy beérkező elektromágneses hullám töltéseket gyorsít, azok viszont sugároznak. Ez a folyamat az elektromágneses hullámok szórása. Ezzel foglalkozunk most.

Legyen a bemenő hullám monokromatikus síkhullám:

$$\mathbf{E}_{be} = e_0 E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H}_{be} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{be}. \quad (5.154)$$

Ez elér egy kisméretű anyagdarabot, annak töltéseit gyorsítja, ezek sugároznak, kialakítva a szórt teret. Miután az anyagdarab kis méretű, feltehetjük, hogy a sugárzása gömbhullám. Ennek megfelelően a teljes elektromos, illetve mágneses tér

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{be} + \mathbf{E}_{szort}, \quad \mathbf{E}_{szort} = \mathbf{C}_{szort} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{H}_{szort} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{szort}, \quad (5.155)$$

ahol \mathbf{C}_{szort} a kimenő gömbhullám amplitúdója.

Hogyan jellemezhető a szórás? Lehetne *szórt teljesítmény/bemenő teljesítmény*, azonban a szórt teljesítmény függ a távolságtól (gömbhullám). Ezért a távolságfüggetlen jellemző

$$d\sigma = \frac{\text{egységnyi térszögbe szórt teljesítmény}}{\text{egységnyi felületen bemenő teljesítmény}} = \frac{|r^2 d\Omega S_{szort}|}{|S_{be}|}. \quad (5.156)$$

Ennek a mennyiségnek felület (m^2) dimenziója van, a neve *szórási hatáskeresztmetszet*. A szórt hullám esetében megtehetjük azt, hogy szétbontjuk polarizáció szerint és csak egy adott \mathbf{e} irányban polarizált összetevőt detektálunk. Beírva a térerősségeket azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{e}^* \mathbf{C}_{szort}|^2}{E_0^2}. \quad (5.157)$$

A *teljes hatáskeresztmetszet* a teljes 4π térszögbe szórt teljesítmény nagysága egységnyi felületen bemenő teljesítmény arányában:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (5.158)$$

5.5.2. Dipólszórás

Tegyük fel, hogy a beeső hullám egy kis anyagdarabon vagy atomon szóródik és ott egy időben változó elektromos polarizációt kelt, amit egy $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ dipólnyomaték jellemez. Ekkor (5.137) felhasználásával

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\mathbf{e}^* \cdot (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{x}}))|^2 \quad (5.159)$$

ahol $\hat{\mathbf{x}}$ a szórt hullám irányába mutató egységvektor. Mivel az elektromágneses hullám transzverzális, ezért $\mathbf{e}^* \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ és így $\mathbf{e}^* \cdot (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{e}^* \cdot (\mathbf{p}_0 - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p}_0$, ahonnan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\mathbf{e}^* \mathbf{p}_0|^2 \quad (5.160)$$

Ha a polarizáció és a gerjesztő elektromos tér közti összefüggés lineáris

$$\mathbf{p}_0 = \gamma\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (5.161)$$

akkor

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \gamma^2 |\mathbf{e}^* \mathbf{e}_0|^2 \quad (5.162)$$

Feladat: Számoljuk ki a szórási hatáskeresztmetszetet egy ϵ_r relatív dielektromos állandójú gömb esetén, amennyiben a gömb R sugara jóval kisebb mint a beeső fény hullámhossza!

Megoldás: Az $R \ll \lambda$ feltétel miatt a dipólusközelítés alkalmazható, valamint a gömböt érő gerjesztő elektromos tér helyfüggése elhanyagolható. Ekkor 2.4.3 alapján

$$\mathbf{p}_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad (5.163)$$

ahonnan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \mathbf{e}_0|^2 \quad (5.164)$$

A dipólszórás egyik fő jellegzetessége a $\sim k^4$ függés, ami a frekvencia negyedik hatványával való növekedést jelent. A másik fő jellemzője a szórt teljesítmény irányfüggése és a szórt hullám polarizációja. A polarizációs vektorokat érdemes a következő módon választani: $\mathbf{e}_0^\perp = \mathbf{e}^\perp = \alpha \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{x}}$ és $\mathbf{e}_0^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{e}^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{x}}$. Ahol $\hat{\mathbf{k}}$ a beeső hullám \mathbf{k} hullámszámvektorának irányába mutató egységvektor, és a normáláshoz $\alpha = 1/\sin\theta$, ahol θ a hullám eltérülésének szöge: $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta$. Választva egy olyan koordinátarendszert, ahol $\hat{\mathbf{k}}\parallel z$, kapjuk

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\perp = \mathbf{e}_0^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_0^\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\parallel = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (5.165)$$

A szükséges skalárszorzatok

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp &= 1, & \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\parallel &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel &= \cos\theta, \\ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel = \cos\theta, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= -\mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp = 0, \\ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= -\mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp = 0, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp = 1. \end{aligned} \quad (5.166)$$

Ilyen módon végülis

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\parallel,\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2}\gamma^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{d\sigma_{\perp\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2}\gamma^2.\end{aligned}\quad (5.167)$$

Vagyis a szórás során a fenti módon választott polarizációk nem keverednek.

A kimenő polarizáltságot a következő mennyiséggel jellemezzük:

$$\Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}.\quad (5.168)$$

Nilván $\Pi(\theta) \in [-1, 1]$, ha $\Pi(\theta) = 1$ akkor teljesen merőleges, ha $\Pi(\theta) = -1$, akkor teljesen párhuzamos a polarizáltság.

Ha a bemenő hullám polarizálatlan, vagyis azonos mennyiségben tartalmazza a különböző polarizációk járulékát, akkor átlagolnunk kell a különböző polarizációk járulékára. A bejövő hullám fele-fele részben áll össze a kétféle polarizációjú komponensből, így ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2}\gamma^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2}\gamma^2.\end{aligned}\quad (5.169)$$

Ha a kimenetkor nem detektáljuk a polarizációt, akkor

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2}\gamma^2(1 + \cos^2 \theta),\quad (5.170)$$

a teljes hatáskeresztmetszet pedig

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{6\pi}\gamma^2\quad (5.171)$$

mivel

$$\int d\Omega(1 + \cos^2 \theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta)(1 + \cos^2 \theta) = 2\pi \int_{-1}^1 dx(1 + x^2) = \frac{16\pi}{3}.\quad (5.172)$$

A dipólszórás egy speciális esete, amikor a fény egy m tömegű q ponttöltésen (pl. elektronon) szóródik, és a töltés mozgását nemrelativisztikusan írhatjuk le. Ekkor a töltés gyorsulása

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}_0 = \frac{q}{m}E_0\mathbf{e}_0\quad (5.173)$$

A Larmor-formula levezetésénél kapott (5.149) eredményt használva

$$\mathbf{E}_{szort} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}},\quad (5.174)$$

ahonnan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 (\mathbf{e}\mathbf{E}_{szort})^2}{E_0^2} = \frac{\mu_0^2 q^4}{16\pi^2 m^2}(\mathbf{e}^* \mathbf{e}_0)^2.\quad (5.175)$$

Ez a Thomson-szórás hatáskeresztmetszete; az együttthatóktól eltekintve a polarizációtól és a szögtől való függése tipikus dipólszórásnál felel meg. Amennyiben a szóró centrum egy $Q_e \approx \pm 1.6 \cdot 10^{-19}$ C elemi töltésű részecske, ezt a formulát érdemes átírni a következő alakba

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{\lambda_c^2}{4\pi^2} (\mathbf{e}^* \mathbf{e}_0)^2, \quad (5.176)$$

ahol

$$\alpha = \frac{Q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (5.177)$$

a finomszerkezeti állandó,

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (5.178)$$

pedig a részecske Compton hullámhossza, aminek értéke az elektron esetén

$$\lambda_c = 2.4263102367(11) \cdot 10^{-12} \text{ m}. \quad (5.179)$$

A Thomson-szórás formulája abban az esetben érvényes, amikor a beeső fény hullámhossza jóval nagyobb, mint a Compton-hullámhossz ($\lambda \gg \lambda_c$); ha ez nem teljesül, a folyamatot a kvantumelektrodinamika módszereivel kell leírni és Compton-szórásnak nevezzük.

5.5.3. Szórás több szórócentrumon. Az alakfaktor

Tegyük fel, hogy a fény nem egyetlen, hanem nagyszámú kisméretű szórócentrumon szóródik, amelyek pozíciója \mathbf{x}_j . Ekkor ha a tér egy adott pontjában pontjában ki akarjuk számolni az eredő szórt térerősséget, az egyes szóró centrumokból odaérkező gömbhullámok fázisfaktora eltérő

$$\mathbf{E}_{szort}^{(j)} \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \quad (5.180)$$

ahol az első faktor abból adódik, hogy a beeső fény mindegyik szórócentrumhoz más fázisban érkezik, a második faktor pedig a szórt hullámok által megtett utakban jelentkező különbséget jelenti. Ha minden szórócentrum egyébként tökéletesen egyforma, akkor

$$\mathbf{E}_{szort}^{(j)} = C e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \quad (5.181)$$

ahol a C amplitúdó mindegyik centrumra egyforma. Tegyük fel továbbá, hogy a teljes anyagdarab mérete kicsi ahhoz a távolsághoz képest, ahonnan a szórt fényt detektáljuk, ekkor az origót az anyagdarabban felvéve felírható, hogy

$$\mathbf{E}_{szort}^{(j)} \approx C e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} \frac{e^{ik(x-\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}_j)}}{|\mathbf{x}|} = C \frac{e^{ikx}}{|\mathbf{x}|} e^{i(\mathbf{k}-k\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x}_j} = \mathbf{E}_{1szort}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}-k\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x}_j} \quad (5.182)$$

ahol \mathbf{E}_{1szort} egyetlen, az origóban elhelyezkedő szórócentrum által keltett teret írja le. A teljes szórt térerősség a detektálás \mathbf{x} helyén

$$\mathbf{E}_{szort} = \mathbf{E}_{1szort}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{q}) \quad (5.183)$$

ahol

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}_j} \quad (5.184)$$

és $q = k\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{k}$ a kimenő és a bejövő hullámszám különbsége. Az irányfüggő $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ faktor valójában a szórócentrumok

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (5.185)$$

térbeli eloszlásának Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \quad (5.186)$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|r^2 S_{szort}|}{|S_{be}|} \quad \text{és} \quad S_{szort} \propto \mathbf{E}_{szort}^2 \quad (5.187)$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_1 F(\mathbf{q}) . \quad (5.188)$$

Az

$$F(\mathbf{q}) = |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \sum_{j,l} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)} \quad (5.189)$$

mennyiséget alakfaktornak nevezzük. Összegezve tehát: egy közegen való szóráskor a szórási hatáskeresztmetszet egy adott szórócentrum egyedi hatáskeresztmetszete szorozva a közeg alakfaktorával.

5.5.4. Szórás gázon, sűrűségingadozásokon és szabályos kristályon

Tegyük fel, hogy a szórócentrumok egyedi molekulák, amelyek jóval kisebbek a beeső fény hullámhosszánál, a molekuláris elektromos polarizálhatóság pedig γ_{mol} ⁵. Ezzel (5.169) alapján

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2, \quad \mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}_j}, \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}. \quad (5.190)$$

Gáz esetén a szórócentrumok véletlenszerűen helyezkednek el, ezért a (5.189) kifejezésben a $j \neq l$ járulékok kiátlagolják egymást, ezért marad

$$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = N, \quad (5.191)$$

ahol N a szórócentrumok száma. A térfogategységre számolt szórási hatáskeresztmetszet ezért

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2, \quad \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}, \quad (5.192)$$

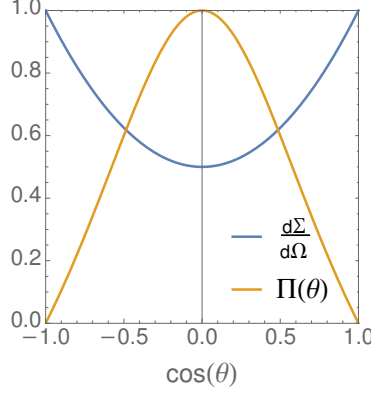
ahol $\mathcal{N} = N/V$ a szórócentrumok sűrűsége. Sűrűbb anyagban és nagyobb frekvenciáknál tehát erősebben szóródást látunk.

A teljes differenciális hatáskeresztmetszet illetve a polarizáltság

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 (1 + \cos^2 \theta) = \frac{k^4 \mathcal{N}}{16\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 \frac{d\Sigma}{d\Omega}, \quad \Pi(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (5.193)$$

l. az 5.4 ábrán. Láthatóan $\cos \theta = 0$, azaz a bejövő irányra merőlegesen a legkisebb a szórt fény intenzitása, és ott teljes a polarizáltság.

⁵A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a beeső hullám csupán elektromosan polarizálja a közeg részecskéit, mágnesesen nem.



5.4. ábra. Polarizáltság és differenciális hatáskeresztmetszet szögfüggése gázon való szórás esetén, az utóbbi esetén a $\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ függvényt ábrázoltuk.

A teljes hatáskeresztmetszet (5.158) az összes irányra összegzett differenciális hatáskeresztmetszet, vagyis a szórt teljes intenzitás:

$$\alpha = \frac{1}{V}\sigma = \frac{1}{V} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{6\pi} |\gamma_{mol}|^2. \quad (5.194)$$

Ezt kifejezhetjük a törésmutatóval is, hiszen ritka gázra $\varepsilon_r = 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}$, és $n = \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}/2$ (l. Clausius-Mosotti egyenlet, (2.144)), ezzel

$$\alpha = \frac{2k^4}{3\pi\mathcal{N}}(n-1)^2, \quad (5.195)$$

ez a *Rayleigh szórás* formulája.

A térfogattal normált teljes szórási hatáskeresztmetszet leírja a beeső fény intenzitásvesztését: egy $dAdx$ térfogatú térelemre felírva az ott levő anyag által kiszórt összteljesítményre felírható

$$\frac{dP_{szort}}{S_{be}} = \sigma, \quad (5.196)$$

ahol S_{be} a bemenő teljesítmény-áram. A kiszórt összteljesítmény az eredeti hullám intenzitásvesztése: $dP_{szort} = -dP_{be}$. Másrészt a térfogatelembe belépő teljesítmény $P_{be} = dAS_{be}$. Emiatt

$$\frac{dP_{be}dA}{P_{be}} = -\sigma = -dAdx\alpha \Rightarrow \frac{d \ln P_{be}}{dx} = -\alpha \Rightarrow P_{be} \sim P_{be}^{(0)} e^{-\alpha x}. \quad (5.197)$$

Légkörön való szórásra alkalmazva a fentieket

- a szórás erőssége $\sim k^4$, ezért ha a szórt fényt figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák dominálnak, vagyis kék az ég
- ha a fényforrást figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák egy része már kiszóródott, vagyis a lemenő Nap fénye vöröses
- $\theta = \pi/2$ -nél, vagyis a Napra merőleges irányban legkisebb a differenciális szórási hatáskeresztmetszet, vagyis ott a legsötétebb (legmélyebb) az ég
- itt teljesen polarizált a fény, ebből a Nap irányát még akkor is meg lehet határozni, ha nem látszik a Nap.

- ha a szórócentrumok sűrűsége végtelenhez tartana, de a törésmutató nem lenne 1, akkor $\alpha \rightarrow 0$, vagyis nem lenne szórás. Az ég kék színe tehát az atomok létezésének közvetett bizonyítéka.

A fenti gondolatmenet alkalmazható akkor is, ha a szórócentrumot nem molekulák alkotják, hanem homogén anyag sűrűség-ingadozásai. A Clausius-Mosotti egyenlet kis sűrűségeknél érvényes alakjából az átlagos relatív dielektromos állandó $\varepsilon_r = 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}$, azaz az átlagos szuszceptibilitás $\chi_E = \mathcal{N}\gamma_{mol}$. A szórás ennek ingadozásain történik:

$$\frac{\delta\chi_E(\mathbf{x})}{\chi_E} = \frac{\delta\mathcal{N}(\mathbf{x})}{\mathcal{N}} \Rightarrow \delta\chi_E(\mathbf{x}) = \chi_E \frac{\delta\mathcal{N}(\mathbf{x})}{\mathcal{N}} = 2(n-1) \frac{\delta\mathcal{N}(\mathbf{x})}{\mathcal{N}}, \quad (5.198)$$

ahol az utolsó képletben a törésmutatót használtuk fel. Ez azt jelenti, hogy a (5.190) képletben a $\gamma_{mol}\mathcal{F}(\mathbf{q})$ kifejezés helyére a

$$\delta\chi_E(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_E(\mathbf{x}) \quad (5.199)$$

kifejezést kell helyettesíteni, így

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2} |\delta\chi_E(\mathbf{q})|^2 = \frac{k^4(n-1)^2}{8\pi^2\mathcal{N}^2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \delta\mathcal{N}(\mathbf{x}) \delta\mathcal{N}(\mathbf{y}). \quad (5.200)$$

Ha feltesszük, hogy egy V_0 tartományon túl a sűrűség fluktuációk korrelálatlanok, akkor a $\langle \delta\mathcal{N}(\mathbf{x}) \delta\mathcal{N}(\mathbf{y}) \rangle$ statisztikus átlagra nullát kapunk, ha $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin V_0$. Emiatt a kettős integrál kifejezésében az egyik koordináta V_0 -t, a másik a teljes V térfogatot futja be. Legyen $N = V_0\mathcal{N}$, ekkor

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4(n-1)^2}{8\pi^2 N^2} \langle \delta N^2 \rangle V_0. \quad (5.201)$$

Statisztikus fizikából lehet tudni, hogy $\langle \delta N^2 \rangle = k_B T \partial N / \partial \mu$, ahol μ a kémiai potenciál. Termodinamikai összefüggésekből pedig a derivált átírható. Végülis azt kapjuk, hogy

$$\frac{\langle \delta N^2 \rangle}{N} = \mathcal{N} k_B T \beta_T, \quad \text{ahol} \quad \beta_T = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T, \quad (5.202)$$

az izoterm kompresszibilitás. Ezzel

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4(n-1)^2}{8\pi^2} k_B T \beta_T, \quad \alpha = \frac{2k^4(n-1)^2}{3\pi} k_B T \beta_T. \quad (5.203)$$

Ez a képlet igen hasonlít a Rayleigh-szórásból kapott (5.195) képlethez. Másodrendű fázisátalakulásnál $\beta_T \rightarrow \infty$, ekkor tehát az anyag szórási képessége jelentősen felerősödik. Ez a *kritikus opaleszcencia* jelensége.

Ha a szórócentrumok nem véletlenszerűen helyezkednek el, akkor $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ bonyolultabb struktúrát mutat. Pl. köbös kristályrács esetén:

$$\mathbf{x}_j = a \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{e}_i, \quad n_i = -N_i, \dots, N_i, \quad (5.204)$$

azaz egy $(2N_1 + 1) \times (2N_2 + 1) \times (2N_3 + 1)$ méretű rácsot veszünk⁶. Emiatt

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} = \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} e^{iq_i a n_i} = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin \frac{q_i a}{2}} \Rightarrow F(\mathbf{q}) = |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin^2 \frac{q_i a}{2}}, \quad (5.205)$$

⁶Annak, hogy a rács méretei páratlanok, az eredmény szempontjából nincs jelentősége, csak a számolást egyszerűsíti.

mivel

$$\sum_{n=-N}^N e^{iqan} = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} qa}{\sin \frac{qa}{2}}. \quad (5.206)$$

Az $F(\mathbf{q})$ alakfaktor majdnem minden \mathbf{q} -ra $\mathcal{O}(1)$, vagyis térfogattal osztva eltűnik a végtelen térfogati limeszben. Kivételt képeznek azok a helyek, ahol

$$q_i = \frac{2\pi\ell_i}{a}, \quad \text{ahol } \ell_i \in \mathbf{N} \quad (\text{Bragg-feltétel}) \Rightarrow e^{iq_i a n_i} = 1 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{q}) = N^2. \quad (5.207)$$

Az erősítés helyeit figyelve az anyag szerkezetére következtethetünk (röntgenkrisztallográfia).

5.6. Relativisztikus formalizmus

5.6.1. Előzmények

A speciális relativitáselmélet gyökerei szoros összefüggésben vannak az elektrodinamikával. A Maxwell egyenletek hatalmas sikerek lettek elkönnyelve, mivel összekötötték az elektromosságot, a mágnességet és az optikát. Mivel a fizika korábbi története során hullámok mindig valamilyen közeg segítségével terjedtek, logikus feltételezés volt, hogy az elektromágneses hullámok is egy addig felfedezetlen „éternek” nevezett közegben terjednek, ami szükség szerint az tér minden pontján jelen van.

Ez az éter éles különbséget tett az elektromágneses jelenségek és a fizika többi része között, ugyanis jól ismert volt, hogy a mechanika törvényei azonosak egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó koordinátarendszerekben, vagyis Galilei transzformációk alatt invariánsak. A hullámegyenletekre azonban ez nem igaz. Hanghullámok esetén például csak a levegővel együtt mozgó koordinátarendszerben teljesülnek.

Az ellentmondás feloldására három lehetőség volt:

1. A Maxwell-egyenletek nem korrektek, létezik egy pontosabb leírás ami invariáns a Galilei transzformációkra.
2. A klasszikus mechanikára érvényes a Galilei transzformáció, de létezik egy kitüntetett koordinátarendszer, amiben az éter nyugalomban van.
3. Létezik egy közös relativitás elmélet a klasszikus mechanikára és az elektrodinamikára, de ez nem a Galilei relativitás. Ebből az is következne, hogy a klasszikus mechanikát módosítani kell.

Az első lehetőség a Maxwell-egyenletek hatalmas sikere miatt nagyon valószínűtlennek tűnt. A legtöbb fizikus először a második lehetőséget fogadta el. Ennek bizonyításaként Michelson és Morley megpróbálták megmérni a föld relatív sebességét az éter nyugalmi rendszeréhez képest, azonban nem jártak sikerrel az éter kimutatásában. Einstein így a harmadik lehetőséget vette alapul és megalkotta a speciális relativitáselméletet.

5.6.2. Négyes vektorok

Vezessük be a nulladik térkoordinátát $x^0 = ct$ módon, vagyis az időt azzal a távolsággal mérjük, amit a fény egységnyi idő alatt megtesz. Ekkor egy eseményt egy négyesvektorral jellemezhetünk

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}). \quad (5.208)$$

Az indexet felülre tesszük, és kontravariáns koordinátáknak nevezzük. A négyesvektor szerinti parciális deriválás

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (5.209)$$

a deriválás indexe alul van, ezek a kovariáns vektorok. Az integrálás

$$\int d^4x = c \int dt d^3\mathbf{x}. \quad (5.210)$$

Vektorok skaláris szorzatához egy metrikus tenzort vezetünk be. A motiváció az, hogy az elektrodinamikában a hullámegyenletben a $\square = \Delta - \partial_t^2/c^2$ differenciáloperátor jelenik meg:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \Rightarrow a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (5.211)$$

$$g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu. \quad (5.212)$$

Komponensekben kiírva tehát

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2/c^2 - \Delta = -\square, \quad x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (5.213)$$

Ez azt jelenti, hogy nem csak a nullvektor hossza nulla, hanem minden $r = ct$ pontra igaz ez, azaz a fénykúp elemeire. Az origóból fénysebességnél kisebb átlagsebességgel elérhető eseményeknél $r = vt$, azaz $x^2 = (c^2 - v^2)t^2 > 0$, ezek az *időszerű* események. Ha $x^2 < 0$, akkor *térszerű* eseményekről beszélünk.

A térkoordinátáknak megfelelően az elektrodinamika mennyiségeit is négyesvektorokba rendezhetjük. Egy tömegpont esetén a töltéssűrűség $\varrho = q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$, míg az áramsűrűség $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$. Mivel $v_i = \dot{x}_i$, ez azt sugallja, hogy érdemes

$$\mathcal{J}^\mu = (c\varrho, \mathbf{J}) \quad (5.214)$$

módon definiálni a négyes áramsűrűséget. Ekkor a kontinuitási egyenlet

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_i J_i = \frac{1}{c} \partial_t (c\varrho) + \partial_i \mathcal{J}^i = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (5.215)$$

a négyesdivergencia eltűnését jelenti.

A skalár- és vektorpotenciál sztatikus ponttöltés esetén a töltésből és áramból ugyanolyan módon áll elő, de az egyiket $1/\varepsilon_0$, a másikat μ_0 szorozza, emiatt Φ/c és \mathbf{A} azonos dimenziójú:

$$\frac{\Phi}{c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cr} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi r}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q\mathbf{v}}{4\pi r}. \quad (5.216)$$

Emiatt a négyespotenciál definíciója

$$\mathcal{A}^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}\right). \quad (5.217)$$

Hogy a Maxwell-egyenleteket le tudjuk írni, bevezetjük a *térerősség-tenzort*:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu, \quad F^{\mu\mu} = -F^{\nu\mu}. \quad (5.218)$$

Mivel

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \Phi - \partial_t A_i = -\partial_i c \mathcal{A}^0 - c \partial_0 \mathcal{A}^i = -c(\partial^0 \mathcal{A}^i - \partial^i \mathcal{A}^0) = -c F^{0i} \Rightarrow F^{0i} = -\frac{1}{c} E_i \\ B_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = -\varepsilon_{ijk} \partial^j \mathcal{A}^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial^j \mathcal{A}^k - \partial^k \mathcal{A}^j) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \Rightarrow F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k. \end{aligned} \quad (5.219)$$

Vagyis a felső indexes térerősség-tenzor komponenseinek jelentése

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.220)$$

A Maxwell egyenletek egy része a térerősségtenzor deriváltjaival van kapcsolatban:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \partial_i E_i = \frac{1}{c} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \mathcal{J}^0 \\ \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 \mathcal{J}^i,\end{aligned}\quad (5.221)$$

vagyis összefoglalva

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{J}^\nu. \quad (5.222)$$

A többi Maxwell egyenlet valójában azonosság: vezessük be a duális térerősség-tenzort:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \text{ahol } \varepsilon^{0123} = 1, \quad (5.223)$$

és teljesen antiszimmetrikus, azaz minden indexpár cseréjére jelet vált. Emiatt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$. A három dimenziós Levi-Civita szimbólummal való kapcsolata $\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$. A duális kapcsolat

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_l) = -B_i = -\frac{1}{c} \tilde{E}_i \Rightarrow \tilde{E}_i = c B_i \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{ijk0} F_{k0} + \varepsilon^{ij0k} F_{0k}) = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} E_k = -\varepsilon_{ijk} \tilde{B}_k \Rightarrow c \tilde{B}_k = -E_k.\end{aligned}\quad (5.224)$$

A duális térerősségtenzor négyesderiváltja automatikusan nulla, hiszen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\rho) = 0, \quad (5.225)$$

ami egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix szorzata. Ezen egyenletek jelentése

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon^{i0jk} F_{jk} = \frac{1}{2} \partial_i (-\varepsilon_{ijk}) (-\varepsilon_{jkl} B_l) = \operatorname{div} \mathbf{B}, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = \frac{1}{2} \partial_0 \varepsilon^{0ijk} F_{jk} + \frac{1}{2} \partial_j (\varepsilon^{ji0k} F_{0k} + \varepsilon^{jik0} F_{k0}) = \frac{1}{2c} \partial_t \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_l) + \frac{1}{c} \partial_j \varepsilon_{jik} E_k = \\ &= -\frac{1}{c} [\partial_t B_i + (\operatorname{rot} \mathbf{E})_i].\end{aligned}\quad (5.226)$$

Vagyis ez a két egyenlet a térerősség-tenzor szintjén nem egyenlet, hanem azonosság. Visszafelé gondolkodva pont ez a két egyenlet tette lehetővé a skalár- illetve vektorpotenciál bevezetését.

A Maxwell-egyenletek tehát relativisztikus formalizmusban:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{J}^\nu.} \quad (5.227)$$

Ha a második egyenletbe beírjuk $F^{\mu\nu}$ definícióját:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu \mathcal{A}^\mu) = \mu_0 \mathcal{J}^\nu. \quad (5.228)$$

Könnyen belátható, hogy a Lorentz-mérték (5.34) feltétele relativisztikus formalizmusban $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, vagyis ekkor a baloldal második tagja eltűnik. Így a potenciálokra érvényes Maxwell-egyenlet:

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu = -\square \mathcal{A}^\nu = \mu_0 \mathcal{J}^\nu \quad (5.229)$$

5.6.3. Lorentz-transzformációk

A Maxwell-egyenleteket tehát sikerült átfogalmazni olyan alakba, amely kizárólag négyes skalárszorzatokat tartalmaz. Emiatt a Maxwell-egyenletek alakja változatlan marad akkor, ha olyan transzformációt hajtunk végre a négyesvektorokon illetve -tenzorokon, amelyek a *négyes* skalárszorzatot invariánsan hagyják. Emlékeztetőül: a hármas skalár szorzatot invariánsan hagyó transzformációk a forgatások. Lehet tehát ezeket a transzformációkat általánosított forgatásokként felfogni, ahol az idő komponens is „forgatjuk”. A különbség a skalár szorzat tér és idő komponensei között az előjelben van.

Keressük tehát a négyesvektorok olyan lineáris transzformációit

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad \forall a^{\mu} \quad (5.230)$$

amelyre a négyes skaláris szorzat invariáns marad:

$$\forall a, b \quad a' \cdot b' = a \cdot b \Rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} g_{\mu\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} b^{\nu'} = a^{\nu} b^{\nu'} g_{\nu\nu'}. \quad (5.231)$$

Ha ez minden a, b -re teljesül, akkor

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} g_{\mu\mu'} = g_{\nu\nu'}. \quad (5.232)$$

Ezeket hívjuk *Lorentz-transzformációknak*. A pont azért kell, mert nem mindegy, hogy melyik az első és melyik a második index. Néhány formula:

$$a'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} a_{\nu}, \quad \Lambda^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma}, \quad (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\rho} = \Lambda^{\nu}_{\rho}. \quad (5.233)$$

A helyvektor négyesvektor, így ennek transzformációja

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Rightarrow \partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \partial_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}, \quad (5.234)$$

vagyis a deriválás valóban kovariáns vektorként transzformálódik.

A mezők transzformációja: a transzformált mező a transzformált helyen az eredeti mező elforgatottja, amelyet a régi helyen kell venni – l. forgatás példája. Pl:

$$\mathcal{A}'(x') = \Lambda \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}'(x) = \Lambda \mathcal{A}(\Lambda^{-1}x). \quad (5.235)$$

Ha találunk ilyen mátrixot, akkor minden négyes skaláris szorzattal megfogalmazható egyenlet ugyanolyan alakú lesz a transzformáció után is. Hogy ezt jobban lássuk, nézzük meg a Maxwell-egyenletek transzformációját. A térerősség-tenzor transzformációja

$$F'^{\mu\nu}(x') = \partial'^{\mu} \mathcal{A}'^{\nu}(x') - \partial'^{\nu} \mathcal{A}'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} F^{\mu'\nu'}(x). \quad (5.236)$$

Ha az áramsűrűséget is négyesvektorként transzformáljuk, akkor

$$\partial'_{\mu} F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \partial_{\mu'} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\nu'} F^{\rho\nu'}(x) = \Lambda^{\nu}_{\nu'} \partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'}(x) = \Lambda^{\nu}_{\nu'} \mu_0 \mathcal{J}^{\nu'}(x) = \mu_0 \mathcal{J}'^{\nu}(x'), \quad (5.237)$$

vagyis a transzformált térerősség-tenzor transzformált koordináták szerinti deriváltja a transzformált áramsűrűséget adja meg. Az elektrodinamika tehát invariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben.

A Lorentz-transzformáció mátrixa 4×4 -es valós mátrix, azaz 16 paraméteres. A definiáló egyenlete (5.232) 4×4 -es szimmetrikus mátrix nulla voltát követeli meg, ami 10 megkötést jelent. A Lorentz transzformációk tehát 6 paramétertől függenek.

Jelöljük

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \Rightarrow g \Lambda^T g \Lambda = \mathbf{1}. \quad (5.238)$$

Ennek speciális példája, ha $\Lambda_{.0}^0 = 1$, $\Lambda_{.i}^0 = \Lambda_{.0}^i = 0$, és $\Lambda_{.j}^i = O_{ij}$, azaz

$$\Lambda_{.\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} \Rightarrow g\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}. \quad (5.239)$$

Ez azt jelenti, hogy O ortogonális mátrix, azaz forgatást ír le. 3D-s forgatásnak 3 paramétere van, ez a Lorentz-transzformációk 6 paraméteréből 3.

Másik speciális Lorentz transzformáció:

$$\Lambda_{.\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda_{.0}^0 & \Lambda_{.1}^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{.0}^1 & \Lambda_{.1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.240)$$

Elég a felső almatrixra koncentrálni, erre (5.232) megkötés:

$$g\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{.0}^0 & -\Lambda_{.0}^1 \\ -\Lambda_{.1}^0 & \Lambda_{.1}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{.0}^0 & \Lambda_{.1}^0 \\ \Lambda_{.0}^1 & \Lambda_{.1}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_{.0}^0)^2 - (\Lambda_{.1}^0)^2 & \Lambda_{.0}^0 \Lambda_{.1}^0 - \Lambda_{.0}^1 \Lambda_{.1}^1 \\ -\Lambda_{.0}^0 \Lambda_{.1}^0 + \Lambda_{.0}^1 \Lambda_{.1}^1 & (\Lambda_{.1}^1)^2 - (\Lambda_{.0}^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.241)$$

azaz

$$\begin{aligned} (\Lambda_{.0}^0)^2 - (\Lambda_{.1}^0)^2 = 1 &\Rightarrow \Lambda_{.0}^0 = \cosh \eta, & \Lambda_{.1}^0 = \sinh \eta \\ (\Lambda_{.1}^1)^2 - (\Lambda_{.0}^1)^2 = 1 &\Rightarrow \Lambda_{.1}^1 = \cosh \bar{\eta}, & \Lambda_{.0}^1 = \sinh \bar{\eta} \\ \Lambda_{.0}^0 \Lambda_{.1}^0 - \Lambda_{.0}^1 \Lambda_{.1}^1 &\Rightarrow \tanh \eta = \tanh \bar{\eta} &\Rightarrow \eta = \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (5.242)$$

Emiatt

$$\Lambda_{.\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (5.243)$$

Hogy ennek fizikai jelentését megtaláljuk, alkalmazzuk a helyvektorra:

$$x'^0 = \cosh \eta x^0 + \sinh \eta x^1, \quad x'^1 = \sinh \eta x^0 + \cosh \eta x^1. \quad (5.244)$$

A vesszős rendszer origójának egyenlete az eredeti rendszerben: $x'^1 = 0$, azaz

$$x'^1 = 0 = \cosh \eta x + \sinh \eta ct \Rightarrow x = -c \tanh \eta t \Rightarrow \tanh \eta = -\frac{v}{c} = -\beta. \quad (5.245)$$

Emiatt az η paraméter a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél a mozgó rendszer sebességével van kapcsolatban – emiatt neve *rapidity*. A fenti példa az x irányban mozgó rendszerre való áttérést jelentette, hasonló módon az y illetve z irányba való áttérést is meg lehet tenni: ez a Lorentz transzformációk újabb 3 paraméterét adják. A Lorentz transzformációk 6 paramétere tehát: 3 forgatás és 3 „boost”.

Mivel

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma, \quad \sinh \eta = \frac{\tanh \eta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = -\gamma\beta \Rightarrow \Lambda_{.\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.246)$$

Nézzük meg különböző négyesvektorok transzformációját: a helyvektor esetén

$$x^{\mu} = (ct, x) \Rightarrow t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.247)$$

Az áramsűrűség esetén

$$\mathcal{J}^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \Rightarrow \rho' = \frac{\rho - vJ/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad J' = \frac{J - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.248)$$

A négyespotenciálok esetén

$$\mathcal{A}^\mu = (\Phi/c, \mathbf{A}) \Rightarrow \Phi' = \frac{\Phi - vA}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A' = \frac{A - v\Phi/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.249)$$

A térerősség-tenzor tenzorként transzformálódik

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} F^{\mu'\nu'}. \quad (5.250)$$

A különböző komponensek transzformációja:

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^0_{\mu'} \Lambda^1_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) F^{01} = F^{01} \\ F'^{0i} \Big|_{i>1} &= \Lambda^0_{\mu'} \Lambda^i_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^0_{\mu'} F^{\mu'i} = \cosh \eta F^{0i} + \sinh \eta F^{1i} \\ F'^{1i} \Big|_{i>1} &= \Lambda^1_{\mu'} \Lambda^i_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^1_{\mu'} F^{\mu'i} = \sinh \eta F^{0i} + \cosh \eta F^{1i} \\ F'^{23} &= \Lambda^2_{\mu'} \Lambda^3_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = F^{23}. \end{aligned} \quad (5.251)$$

Az elektromágneses térrel megfogalmazva

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & E'_3 &= \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \frac{B_2 + vE_3/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & B'_3 &= \frac{B_3 - vE_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (5.252)$$

5.6.4. Szabad relativisztikus részecske

Einstein arra mutatott rá, hogy ha egy tömegpont kölcsönhat az elektromágneses térrel, akkor ott is a Lorentz-transzformációkat kell használni a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél. A mozgásegyenleteknek relativisztikusan kovariánsnak kell lenniük.

Először azt állapítsuk meg, hogy egy részecske pályája mentén milyen invariánsok illetve négyesvektorok definiálhatók, hiszen ezek használhatók egy kovariáns mozgásegyenlet felírásához. A pálya a négyes térben $\gamma^\mu(s) = (ct(s), \mathbf{x}(s))$ alakú, ahol s a paraméter. A pálya ívhossza, illetve az ebből definiált sajátidő

$$c\tau = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{\frac{d\gamma^\mu}{ds} \frac{d\gamma_\mu}{ds}} \quad (5.253)$$

egy skalárszorzatot tartalmaz, vagyis relativisztikusan invariáns. Az idővel paraméterezve a pályát $\gamma^\mu(t) = (ct, \mathbf{x}(t))$, azaz

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma d\tau = dt. \quad (5.254)$$

Kovariáns mennyiség a *négyessebesség* – szokásosan normálni szokták c -vel

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} = \gamma \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \Rightarrow u^\mu u_\mu = 1. \quad (5.255)$$

Az impulzus $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ahol most m a részecske (nyugalmi) tömege. Ennek relativisztikusan invariáns négyesvektor megfelelője tehát:

$$P^\mu = mcu^\mu. \quad (5.256)$$

Ez szintén négyesvektor, a nulladik komponensének jelentését a $v \ll c$ limeszből lehet leolvasni:

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots \right) \Rightarrow P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad \mathcal{E} = \gamma mc^2, \quad (5.257)$$

ahol \mathcal{E} a részecske energiája. Az energia és impulzus négyesvektort képez tehát

$$P^\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) = \gamma(mc, m\mathbf{v}), \quad P^2 = m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4. \quad (5.258)$$

A mozgásegyenlet tiszta elektromos térben az volt, hogy $\partial_t \mathbf{p} = q\mathbf{E}$. Ennek relativisztikus kiterjesztéséhez vegyük figyelembe, hogy $E_i = cF^{i0} = cF^{i0}u_0/\gamma$, és a $\partial_t = \partial_\tau/\gamma$, vagyis:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(mu^\mu) = qF^{\mu\nu}u_\nu. \quad (5.259)$$

A térszerű indexekre

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(m\gamma \frac{v_i}{c} \right) = qF^{i\mu}u_\mu = qF^{i0}u_0 + qF^{ij}u_j = q\frac{E_i}{c}\gamma + q(-\varepsilon_{ijk}B_k)(-\gamma\frac{v_j}{c}) = \frac{\gamma}{c} q(E_i + \varepsilon_{ijk}v_jB_k), \quad (5.260)$$

átrendezve

$$\partial_t(m\mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.261)$$

Vagyis a jobb oldalon megkapjuk a Lorentz erőt, mint a Coulomb-erő relativisztikus kiterjesztését.

Az időszzerű indexre

$$\frac{\partial(m\gamma)}{\partial \tau} = qF^{0i}u_i = q \left(-\frac{E_i}{c} \right) \left(-\gamma \frac{v_i}{c} \right) = \frac{\gamma}{c^2} q\mathbf{E}\mathbf{v} \Rightarrow \partial_t(m\gamma c^2) = \partial_t \mathcal{E} = q\mathbf{E}\mathbf{v}, \quad (5.262)$$

ami az energia változását írja le.

A mozgásegyenletet energia-impulzus mérlegegyenlet formájában is írhatjuk. Tömegpontra ugyanis $\gamma J^\mu = \gamma(qc, q\mathbf{v}) = cu^\mu$, ezért

$$\partial_t(mcu^\mu) = F^{\mu\nu}J_\nu = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^\rho = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\rho \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right]. \quad (5.263)$$

Ez utóbbi formula bizonyításához

$$\begin{aligned} F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= (\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)(\partial^\rho \partial^\mu A^\nu - \partial^\rho \partial^\nu A^\mu) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\rho) - (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu)(\partial_\rho A_\nu) + (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\rho) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\rho), \end{aligned} \quad (5.264)$$

hiszen a $\rho \rightarrow \nu$ indexcserére a középső sor utolsó két tagja egymásba megy át. Másrészt

$$\begin{aligned} \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'}) &= \partial^\mu (\partial^\nu A^{\nu'} - \partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_\nu A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_\nu) = 2\partial^\mu [(\partial^\nu A^{\nu'})(\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_{\nu'} A_\nu)] = \\ &= 4[(\partial^\mu \partial^\nu A^{\nu'})(\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^\mu \partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_{\nu'} A_\nu)]. \end{aligned} \quad (5.265)$$

Emiatt $4F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'})$, azaz

$$\partial_\rho \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right] = -F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^\rho - F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'}) = -F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^\rho. \quad (5.266)$$

A (5.263) egyenletet átírva

$$\partial_t P^\mu + \partial_\rho T^{\rho\mu} = 0, \quad \text{ahol} \quad T^{\rho\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right], \quad (5.267)$$

vagy komponensekben kiírva

$$\partial_t(\mathcal{E} + T^{00}) + \partial_i(cT^{i0}) = 0, \quad \partial_t(p_i + \frac{1}{c}T^{i0}) + \partial_j T^{ij} = 0. \quad (5.268)$$

Ennek értelmezése: a mechanikai és az elektromágneses tér összes energiájára illetve impulzusára mérlegegyenlet vonatkozik. $T^{\mu\nu}$ neve energia-impulzus tenzor, komponenseinek jelentése pedig: $T^{00} = w$ energiasűrűség, $S_i = cT^{i0}$ az energia-áramsűrűség, $g_i = T^{0i}/c$ az impulzussűrűség és T^{ij} az impulzus-áramsűrűség (Maxwell-féle feszültségtenzor). A térerősségekkel kifejezve:

$$\frac{1}{4\mu_0} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} = \frac{1}{4\mu_0} [2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}] = \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right], \quad (5.269)$$

ezért

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{0i} F_{0i}] + \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \\ T^{0i} = T^{i0} &= -\frac{1}{\mu_0} F^{0j} F_{j0} = \frac{1}{c\mu_0} E_j \varepsilon_{ijk} B_k = \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i \\ T^{ij} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{i0} F_{0j} - F^{ik} F_{kj}] - \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})_{ij} - (E_i D_j + B_i H_j), \end{aligned} \quad (5.270)$$

megegyeznek a korábban kapott (5.44), (5.45), (5.55) és (5.58) eredményekkel. Mivel az energia-impulzus tenzor szimmetrikus: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, ezért $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$ természetes módon teljesül.

5.6.5. Relativisztikus Larmor-formula

Nemrelativisztikus közelítésben gyorsuló töltés által kisugárzott teljesítményt a (5.152) Larmor formula adja meg:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2, \quad \text{ha} \quad v \ll c. \quad (5.271)$$

A bal oldal itt relativisztikusan invariáns, hiszen álló rendszerben $cP^\mu = (E, 0)$ és $x^\mu = (ct, 0)$, vagyis mozgó rendszerben

$$E' = \gamma E, \quad t' = \gamma t \quad \Rightarrow \quad \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}, \quad (5.272)$$

a teljesítmény minden mozgó megfigyelő számára ugyanaz, mint az álló rendszerben. A jobb oldal a Larmor-képletben azonban nem relativisztikusan invariáns. Viszont a $v \rightarrow 0$ limeszt ismerve invariánsá tehetjük. Ehhez először a négyesgyorsulás képletét vezetjük le:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \gamma(c, \mathbf{v}) \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2(0, \mathbf{a}), \quad (5.273)$$

ahol $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ hármasyorsulás. Mivel $d\gamma/dt = \gamma^3 \mathbf{v}\mathbf{a}/c^2$, ezért

$$a^\mu = (\gamma^4 \beta \mathbf{a}, \gamma^4 \beta(\beta \mathbf{a}) + \gamma^2 \mathbf{a}). \quad (5.274)$$

Álló koordinátarendszerben $a^\mu \rightarrow (0, \mathbf{a})$, azaz

$$a^\mu a_\mu \rightarrow -\mathbf{a}^2, \quad (5.275)$$

vagyis megtaláltuk a \mathbf{a}^2 relativisztikus kiterjesztését. Ezzel a relativisztikus Larmor formula:

$$P = -\frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^\mu a_\mu. \quad (5.276)$$

Sebességekkel és gyorsulásokkal kifejezve:

$$-a^\mu a_\mu = \gamma^4 \mathbf{a}^2 + \gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \mathbf{a})^2 = \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2). \quad (5.277)$$

Ezzel tehát

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2). \quad (5.278)$$

Kifejezhetjük az impulzussal is a kisugárzott teljesítményt: mivel $p^\mu = mcu^\mu$, ezért

$$a^\mu = c \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\gamma}{m} \partial_t p^\mu \Rightarrow -a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{1}{c^2} (\partial_t \mathcal{E})^2 \right]. \quad (5.279)$$

Figyelembe véve, hogy $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, azaz $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, azaz

$$\mathcal{E} \partial_t \mathcal{E} = c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p} \Rightarrow \partial_t \mathcal{E} = \frac{c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (5.280)$$

ezt visszaírva

$$-a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2}{m^2} \left[\frac{(\partial_t \mathbf{p})^2}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right]. \quad (5.281)$$

Továbbá $\mathbf{v}c = \frac{c\mathbf{p}}{\mathcal{E}}$, tehát

$$\gamma^2 \left[\frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2 c^2}{\mathcal{E}^2} \left[\mathbf{p}^2 (\partial_t \mathbf{p})^2 - (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2 \right] = \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m^2 c^2}. \quad (5.282)$$

Vagyis végül (5.276) alapján

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m^2 c^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m^2 c^2} \right]. \quad (5.283)$$

Szinkrotron sugárzás

Speciális esetként vizsgáljuk meg a körpályán mozgó test esetét. Ekkor $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. A test akkor is gyorsul, ha egyenes sebességgel mozog a körpályán, ez a *szinkrotronsugárzás*. Legyen a görbületi sugár r , ekkor

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = va \Rightarrow \mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2 = \frac{1}{\gamma^2} a^2 = \frac{\omega^4 r^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^4 c^4}{\gamma^2 r^2}. \quad (5.284)$$

Ezzel

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} (\gamma \beta)^4. \quad (5.285)$$

Ezt az egyenletet felírhatjuk a részecske impulzusával is, hiszen $\mathcal{E} = m\gamma c^2$ és $\beta = pc/\mathcal{E}$ miatt $\beta\gamma = p/(mc)$:

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{p}{mc} \right)^4 \stackrel{v \approx c}{\approx} \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4, \quad (5.286)$$

ahol az utolsó alak az ultrarelativisztikus sebességekre vonatkozik. Egy fordulat alatt elszenvedett veszteség energiában az ultrarelativisztikus tartományban ($T \approx 2\pi r/c$):

$$\delta\mathcal{E} = PT = \frac{Z_0 q^2 c}{3r} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4. \quad (5.287)$$

Ez igen nagy lehet, különösen, ha m kicsi. A CERN LEP2 gyorsítójában $\mathcal{E} \approx 60\text{GeV}$ energiás elektronnyalábnál $\mathcal{E}/mc^2 = 1.2 \cdot 10^5$, ezzel fordulatonként 300MeV veszteség volt – valójában ez a legfontosabb ok, hogy miért nem érdemes nagyobb energiás elektron-positron szinkrotron építeni.

$\delta\mathcal{E}$ csökkentéséhez adott energia mellett vagy nagyobb sugár kell, vagy nagyobb m . Emiatt a mai gyorsítók már hatalmas méretűek (CERN: 27 km-es (kb 4.3 km sugarú) gyűrű), és elektron helyett protonokat vagy nehézionokat gyorsítanak (LHC). Ekkor a sugárzási veszteség $(m_e/m_p)^4 \approx 6 \cdot 10^{-14}$ faktoriall kisebb, általában elhanyagolható.

Lehet, hogy a sugárzást akarjuk használni, pl. anyagvizsgálatra, ekkor éppen a sugárzási veszteség növelése a cél, mint pl. a grenoble-i European Synchrotron Radiation Facility laboratóriumában. Ehhez az elektronnyalábot hullámzó pályára kényszerítik (undulator/wiggler).

Lineáris gyorsító

Lineáris gyorsítóban $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, azaz $\mathbf{p} \parallel \partial_t \mathbf{p}$, vagyis egy-dimenziós mozgásról van szó. Ekkor $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$, azaz

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m^2 c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2. \quad (5.288)$$

Mekkora a kisugárzott teljesítmény a részecske energiájának egységnyi időbeli növekedéséhez képest? Felhasználva, hogy a külső erő munkája $\partial_t \mathbf{p} = \mathbf{F} = d\mathcal{E}/dx = \partial_x \mathcal{E}$:

$$\frac{P}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m^2 c^2} \frac{(\partial_x \mathcal{E})^2}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m^2 c^2} \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{x}}, \quad \text{ahol} \quad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}, \quad \bar{x} = \frac{6\pi m v}{Z_0 q^2} x. \quad (5.289)$$

Definiálva a részecske töltéssugarát olyan módon, hogy

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r_0} = mc^2, \quad (5.290)$$

az adódik, hogy $\bar{x} = \beta \frac{3x}{2r_0}$. Felhasználva még azt, hogy az energia növekedése a gyorsító térerősség miatt van, beírhatjuk

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = qE \Rightarrow \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{x}} = \frac{2r_0 q}{3\beta mc^2} E. \quad (5.291)$$

Nagy gyorsító tereknél β hamar 1 körüli lesz. Vagyis a kisugárzott teljesítmény akkor összemérhető a gyorsító teljesítménnyel, ha $\delta x \sim r_0$ távolságon a részecske energiája a nyugalmi energiájával növekszik, ami térerősséggel kifejezve

$$E \sim \frac{mc^2}{r_0 q}. \quad (5.292)$$

Elektronra kiszámolva ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$, $c = 2.99 \cdot 10^8\text{m/s}$): $r_0 \approx 1.88 \cdot 10^{-15}\text{m}$. A proton mérete $R_p = 0.88 \cdot 10^{-15}$, vagyis a jobb oldal $r_0 \approx 2.14 R_p$, ez megfelel az atommagok jellemző méretének is. Az elektron saját tömegének megfelelő energia $5.11 \cdot 10^5\text{V}$ gyorsító feszültség során keletkezik, vagyis ekkora feszültségű lenne szükséges atommagnyi méreteken – ez rendkívül nagy! A megfelelő térerősség $E \approx 5 \cdot 10^5\text{V}/2.14 R_p \approx 2.7 \cdot 10^{20}\text{V/m}$. A ma elérhető legnagyobb térerősségek rövid impulzusú lézerekben $\sim 10^{12}\text{V/m}$ nagyságrendűek, ez még messze a kívánt nagyságrend alatt marad. Emiatt a sugárzási veszteség lineáris gyorsítás esetén mindig elhanyagolható.

Másrészt ekkora térerősségek esetén más érdekes jelenségek bekövetkezésére is számíthatunk. A kvantummechanika elvei szerint a vákuumban rövid időre részecske-antirészecske párok keletkeznek, az ilyen állapotok élettartamának becslésére a $\Delta\mathcal{E}\tau \sim \hbar$ relációt lehet használni, ahol \hbar a Planck-állandó, és $\Delta\mathcal{E} = 2mc^2$ egy részecskepár energiája. Ezen összefüggés kissé pongyola, de szemléletes értelmezése, hogy rövid időre a vákuumtól „kölcson lehet venni” energiát, de azt τ idő után vissza kell adni. A visszaadás normál esetben a részecske-antirészecske pár annihilációjával, megsemmisülésével történik. Azonban nagy elektromos terek esetén a rendelkezésre álló τ idő alatt a részecskék gyorsulnak, energiát nyernek. Ha ez az energia elegendő a „kölcson fedezetére”, a részecske és antirészecske nem kell megsemmisüljön, hanem távozik, és megfigyelhető lesz. Nagy térerősségeknél tehát a vákuum nem stabil, hanem „elbomlik” spontán párkeltés segítségével: ez a *Schwinger-effektus*.

Becsüljük meg a szükséges térerősséget elektronra! Ehhez vegyük figyelembe, hogy E térerősség τ idő alatt, relativisztikus sebességekkel számolva $eEc\tau$ energiát képes adni, most e az elemi töltés, az elektron töltése. A szükséges feltétel tehát

$$2mc^2 = eEc\tau = \frac{e\hbar}{mc^2}E.$$

A megjelenő $c\hbar$ helyett érdemes behozni az

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

finomszerkezeti állandót, ezzel

$$c\hbar = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha} = \frac{1}{\alpha}r_emc^2,$$

tehát a vákuumból történő párkeltéshez szükséges térerősség nagyjából

$$E \sim \alpha \frac{mc^2}{r_0q}, \quad (5.293)$$

ez $\alpha \approx \frac{1}{137}$ faktoriall kisebb, mint ami a lineáris gyorsítás sugárzási veszteségének jelentőssé válásához. Ez azt jelenti, hogy a sugárzási veszteség számottevővé váláshoz szükséges térerősséget nem lehet létrehozni; analóg módon a szigetelők elektron-lyuk keltéssel történő elektromos átütésével, egy kritikus térerősség felett maga a vákuum is „átüt” (azaz kisülési lavina indul el benne, ami ebben az esetben elektron-pozitron párokból áll).

A. függelék

Matematika

Matematikai megfogalmazás (első verzió, később újra elővesszük): a mező egy $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ leképezés. A mező valójában a függvény fogalmának kiterjesztése, hiszen ha $n = m = 1$, akkor $U : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 1D függvény. Az elektrodinamikában az alaptér $\mathbf{R}^3 \equiv \{\mathbf{x}\}$ fizikai tér (az idő csak egy paraméter; később átfogalmazunk majd mindent téridőre). Az m értéke lehet

- $m = 1$: skalártér, a tér minden pontjához egy valós számot rendelünk, $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x})$ (pl. hőmérséklet-eloszlás, elektromos potenciál)
- $m = 3$: vektor-mező, minden ponthoz egy 3D vektort rendelünk $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{x})$ (pl. sebesség-eloszlás áramlásnál, elektromos tér).

Komponensek: \mathbf{R}^n -ben a Descartes bázist jelöljük \mathbf{e}_i -vel. Ebben a bázisban kifejthető minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor: így pl. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. A szummát ezentúl el fogjuk hagyni, ismétlődő indexek automatikusan összegzést jelentenek. Ne felejtsük azonban el, hogy a komponenseknek önmagukban nincs jelentésük, csupán a bázis megadásával együtt értelmesek.

\mathbf{R}^n -ben mindig adott egy skalárszorzat $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. A Descartes-bázis erre a skalárszorzatra nézve ortonormált: $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Emiatt a Descartes komponensekkel kifejezve $u, v \in \mathbf{R}^n$ -re $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Tenzorszorzat: $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$ diadikus (tenzor) szorzata $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{nm}$, amely lineáris mindkét komponensében. Emiatt \mathbf{R}^{nm} -en bázist alkot $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \mid i = 1 \dots n, j = 1 \dots m\}$; ebben a bázisban a diadikus szorzat komponensei $u_i v_j$.

Az 1D függvényeknél megszokott fogalmakat kiterjeszthetjük a mezőkre is, megfelelő átfogalmazással. Mezők összege, számmal való szorzata magától értetődik.

A.1. Mezők deriváltja

def.: $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ mező deriváltja $\nabla U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{nm}$ mező, egy adott pontban komponensekben kifejezve

$$\nabla U(\mathbf{x}) \rightarrow \partial_i U_j(\mathbf{x}) \equiv \left. \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}}, \text{ ahol } i = 1, \dots, n, j = 1 \dots m,$$

ahol $\partial/\partial x_i$ jelentése: csak az i . komponens változik, a többi állandó marad. Jelentése: U megváltozása, ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ pontba megyünk:

$$\delta U_j = U_j(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - U_j(\mathbf{x}) = a_i \partial_i U_j, \quad (\text{A.1})$$

Példák:

- $n = m = 1$ esetén $\nabla f = \frac{df}{dx}$ közönséges derivált.

- $n = 3, m = 1$ skalártér esetén $\nabla\Phi \rightarrow \partial_i\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \equiv \text{grad}\Phi$, neve: Φ gradiense. Φ megváltozása \mathbf{a} irányban $\delta\Phi = \mathbf{a} \cdot \text{grad}\Phi$. Emiatt $\text{grad}\Phi$ -re merőleges irányban vannak az ekvipotenciális felületek, maga $\text{grad}\Phi$ a legnagyobb változás irányába mutat.
- $n = m = 3$, ekkor a derivált egy kétindexes mennyiség $\nabla U \rightarrow \partial_i U_j$. Ennek speciális változatai:
 - $\text{div} U = \partial_i U_i$ skalármező, U divergenciája
 - $\text{rot} U = \nabla \times U = \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k$ vektormező, U rotációja.¹
- $\text{div grad}\Phi = \Delta\Phi$, Laplace operátor. Komponensekben kifejezve $\Delta\Phi = \partial_i \partial_i \Phi$.
- $[\text{rot rot} U]_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l U_m = \partial_i \partial_j U_j - \partial_j \partial_j U_i = \text{grad div} U - \Delta U$.
- $\text{div rot} U = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k = 0$, valamint $[\text{rot grad}\Phi]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0$.

A.2. Mezők integrálja

Az 1D függvények integrálját is kiterjeszthetjük mezőkre. Ehhez definiáljuk

- görbe: $\mathbf{R} \supset I \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $s_i(\tau)$. Értelmezése: a görbét paraméterezzük valós számmal. Görbe érintője egy adott pontban $\frac{ds_i}{d\tau}$.
- felület: $\mathbf{R}^2 \supset A \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $f_i(u, v)$. Egy felületnek két érintővektora van, ezeket a $\frac{df_i}{du}$ és $\frac{df_i}{dv}$ vektorok feszítik ki. A felület normálisa merőleges a felület összes érintővektorára: $N_i = \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv}$, a felület normális egységvektora $\mathbf{n} = \mathbf{N}/N$. A felület-elem $df_i = N_i du dv \equiv n_i da$. Ennek da nagysága az $\mathbf{f}_u = \mathbf{f}(u + du, v) - \mathbf{f}(u, v)$ és $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}(u, v + dv) - \mathbf{f}(u, v)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe; valóban, ez a felület $f_u f_v \sin \phi = |\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v|$. Ez, du -ban és dv -ben első rendben megegyezik a fenti kifejezéssel.

Görbén vett integrál

$$\int_s ds_i U(s) = \int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)). \quad (\text{A.2})$$

Más paraméterezést választva $\tau(t)$ áttéréssel:

$$\int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)) = \int_{I'} dt \frac{d\tau}{dt} \frac{ds_i}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} U(s(\tau(t))) = \int_{I'} dt \frac{ds_i}{dt} U(s(t)), \quad (\text{A.3})$$

azaz paraméterezés-független.

Felületre vett integrál

$$\int_f df_i U(f) = \int_A du dv \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv} U(f(u, v)). \quad (\text{A.4})$$

Erről szintén könnyen belátható, hogy paraméterezés-invariáns.

Végül térfogatra vett integrál

$$\int_V d^3x U(x). \quad (\text{A.5})$$

¹ Itt ε_{ijk} teljesen antiszimmetrikus mennyiség és $\varepsilon_{123} = 1$; vagyis nem nulla elemei csak $1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321}$. ε -ok szorzata: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.

Elvileg ezt is lehetne paraméterezni $x(a, b, c)$, ekkor a térfogatelem

$$d^3x = \varepsilon_{ijk} \frac{dx_i}{da} \frac{dx_j}{db} \frac{dx_k}{dc}, \quad (\text{A.6})$$

amely szintén paraméterezés-független.

1D-ban az integrálás és differenciálás között összefüggés van

$$\int_a^b dt \frac{df}{dt} = f(b) - f(a). \quad (\text{A.7})$$

Ez szintén általánosítható magasabb dimenziós mezőkre, a forma mindig ez marad: egy magasabb dimenziós felületre vett integrálja egy deriválnak a felület határára vett alacsonyabb dimenziós integrállal egyezik meg:

$$\begin{aligned} \int_V dV \operatorname{div} U &= \oint_{\partial V} df_i U_i & (\text{Gauss}) \\ \int_A dA [\operatorname{rot} U]_i &= \oint_{\partial A} ds_i U_i & (\text{Stokes}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Derékszögű tartományokra mindkettő bizonyítása egyszerű:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \partial_1 U_1(x_1, x_2, x_3) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 [U_1(b_1, x_2, x_3) - U_1(a_1, x_2, x_3)] = \int_{B_1} df_1 U_1 + \int_{A_1} df_1 U_1, \quad (\text{A.9})$$

mivel az irányítás ott ellentétes. Minden oldalra felösszegezve kapjuk a Gauss-tételt. Másrészt

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [\partial_1 U_2 - \partial_2 U_1] = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [U_2(b_1, x_2) - U_2(a_1, x_2)] - \int_{a_1}^{b_1} dx_1 [U_1(x_1, b_2) - U_1(x_1, a_2)]; \quad (\text{A.10})$$

az irányításokat figyelembe véve ismét megkapjuk a helyes eredményt. A teljes felületet beosztva téglalapokra tetszőleges felületre bizonyítható.

A.3. Lineáris algebra

A lineáris algebrából felhasznált ismeretek közül néhány bizonyítást idézünk fel. Legyen Δ egy $N \times N$ -es önadjungált (valós esetben szimmetrikus) mátrix, ahol az adjungálás definíciója

$$\mathbf{u}^* \mathbf{M} \mathbf{v} = (\mathbf{M}^\dagger \mathbf{u})^* \mathbf{v} \Rightarrow (M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*. \quad (\text{A.11})$$

Ekkor a

$$\Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)} \quad (\text{A.12})$$

sajátérték egyenletet megoldásáról a következőket tudjuk

- λ_a valós, mert

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} &= \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* &= \lambda_i^* \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* = (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\mathbf{F}_{(i)}$ -k ortogonálisak, mert

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* = \lambda_j \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(j)}^* \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\{\mathbf{F}_{(i)} | i = 1, \dots, N\}$ teljes rendszert alkot, azaz minden \mathbf{b} vektorra $\exists \{c_i | i = 1, \dots, N\}$ együtthatók, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{F}_{(i)}$. Az ortogonalitás miatt $c_i = \mathbf{b} \mathbf{F}_{(i)}$.

Komponensekben a vektorokra igaz:

$$\sum_{i=1}^N F_{(i),a}^* F_{(i),b} = \delta_{ab}, \quad \text{és} \quad \sum_{a=1}^N F_{(i),a}^* F_{(j),a} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Irodalomjegyzék

- [1] D.J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics (Pearson, 2017)
- [2] J.D Jackson: Klasszikus elektrodinamika (TypoTEX, Budapest 2004)
- [3] Simonyi K.: A fizika kultúrtörténete (Gondolat, 1986)
- [4] L.D. Landau és E.M. Lifsic: Elméleti Fizika II: Klasszikus erőterek (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- [5] L.D. Landau és E.M. Lifsic: Elméleti Fizika VIII: Folytonos közegek elektrodinamikája (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- [6] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: Mai fizika 5. (Elektromágnesség, Elektrosztatika, Dielektrikumok, Magnetosztatika) (Műszaki Könyvkiadó, 1970)