Mind a négy feladat 25 pontot ér, az elégséges ponthatára 40 pont.

1. Egy pontszerű test ún. logaritmikus spirális alakú pályán mozog úgy, hogy sebességének v_0 nagysága időben állandó. Pályájának egyenlete síkbeli polárkoordinátákban felírva
$$r(\varphi) = Ae^{\varphi} ,$$
ahol $A > 0$ ismert állandó. A részecske a $t = 0$ időpillanatban az origótól éppen A távolságra található, és a pályán olyan irányban mozog, hogy folyamatosan távolodik az origótól. A célunk a részecske mozgásának leírása.
   (a) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont szögkoordinátájának $\varphi(t)$ időfüggését, írja fel a tömegpont sebességvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
   (b) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont szögkoordinátájának $\varphi(t)$ időfüggését, írja fel a sebesség nagyságát az idő függvényében!
   (c) Használja fel, hogy a sebesség nagysága állandó v_0! Adja meg a tömegpont tényleges $\varphi(t)$ függvényét! Figyeljen a kezdeti feltételre!
   (d) Adja meg a tömegpont gyorsulásvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
   (e) **(Bónusz +5p)** Adja meg a pálya görbületi sugarát ott, ahol a $t = 0$ időpontban tartózkodik a tömegpont!

2. Egy m tömegű pontszerű test az x tengely mentén mozoghat az alábbi potenciállal jellemzett külső erőtérben:
$$V(x) = c\,x^4 ,$$
ahol $c > 0$ egy ismert konstans. A célunk a részecske rezgéseinek leírása.
   (a) Amennyiben az m tömeget [kg], az x kitérést [m], a t időt [s], a többi mennyiséget pedig a megfelelő származtatott SI egységben (pl. [N], [J], [W], stb.) mérjük, úgy adjuk meg a c konstans mértékegységét!
   (b) Csupán a mértékegységek figyelembevételével adja meg, arányossági tényező erejéig, hogyan függ a részecske rezgésének T periódusideje az E energiától, m tömegtől és a c állandótól!
   (c) Szeretnénk megtalálni az előző feladatban figyelmen kívül hagyott arányossági tényezőt. Ehhez először írja fel a részecske összenergiájának kifejezését, mint x és $\dot{x}$ függvényét!
   (d) Adja meg a T periódusidőt meghatározó integrált!
   (e) Numerikusan meghatároztuk az alábbi integrált:
$$I = \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} \; (= 2{,}622...) \; .$$
   Az I segítségével adja meg a részecske T periódusidejét az E, m és c függvényében!

3. Egy m tömegű tömegpont mozgását vizsgáljuk az ábrán is vázolt centrális potenciálban, ahol az R_1 és R_2 sugarú héjak között a potenciál nagysága $V_0 > 0$ egyébként 0, azaz

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } r < R_1 \\ V_0 & \text{, ha } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{, ha } R_2 < r \end{cases} .$$

   (a) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont impulzusmomentumának L nagyságát, írja fel a sugárirányú mozgásra jellemző $V_{eff}(r)$ effektív potenciált! Rajzolja is fel a $V_{eff}(r)$ függvényt!

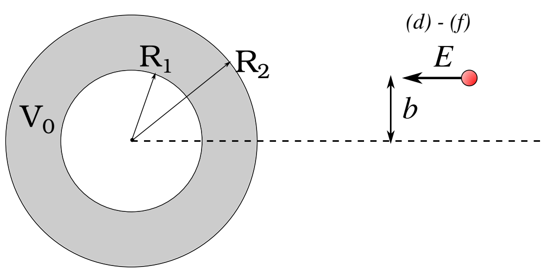
   (b) A feladat első részében kötött mozgásokat keresünk. Ha ismerjük a tömegpont L perdületét, adjuk meg azt az E_{min} és E_{max} energiákat, amik közötti $E \in [E_{min}, E_{max}]$ energiákon kialakulhat kötött mozgás.

   (c) Vázoljuk egy kötött mozgás esetén a tömegpont pályáját.

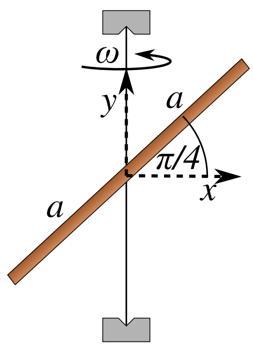
   (d) Most tekintsük azt az esetet, amikor a tömegpont szóródik ezen a centrális potenciálon. Legyen a részecske energiája E, és az impakt paramétere b (lásd ábra)! Írja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált, hogy most benne L perdület helyett a b és E mennyiségek jelenjenek meg!

   (e) Adott b esetén mekkora az a minimális E_{min} energia, aminél nagyobb $E > E_{min}$ energiájú tömegpont bejut a belső héjon belülre, azaz az $r < R_1$ tartományba?

   (f) **(Bónusz +5p)** Az előző feladatban szereplő, elegendően nagy ($E > E_{min}$) energia esetén mekkora r_0 távolságra közelíti meg a tömegpont a gömb középpontját?



3. feladat



4. feladat

4. Egy homogén, m tömegű $2a$ hosszúságú rudat egy függőleges tengelyhez rögzítettünk a középpontjánál úgy, hogy a rúd a vízszintessel $\pi/4$ szöget zár be. A függőleges irány jelöli ki az y tengelyt, az origó a rúd középpontjánál található. A vizsgált időpillanatban a rúd éppen az $x - y$ síkban található, és ω szögsebességgel forog az y tengely körül, ahogy az ábra is mutatja.

   (a) Adja meg a vizsgált időpillanatban a rúd origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték tenzorát!

   (b) A szögsebesség ismeretében adja meg a rúd origóra vonatkozó perdületvektorát ugyanebben a pillanatban!

   (c) Adja meg a rúd (forgási) energiáját!

   (d) Adja meg azt az $\vec{N}$ forgatónyomaték vektort, amivel tartanunk kell a tengelyt, hogy az függőleges maradjon!