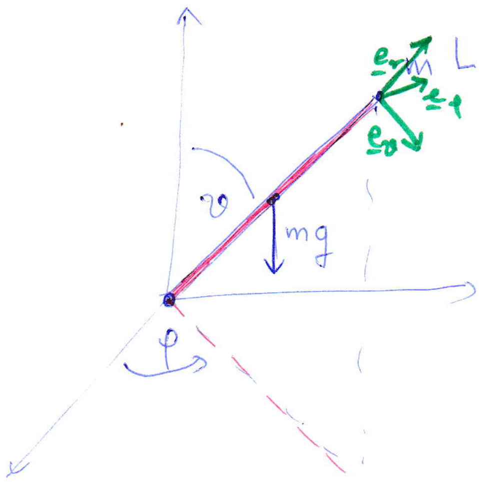
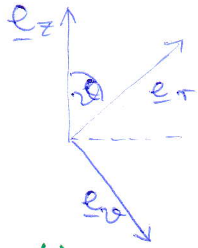


$$\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \cdot \underline{e}_\varphi + \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_z$$

de $\underline{e}_z = \cos\vartheta\, \underline{e}_r - \sin\vartheta\, \underline{e}_\vartheta$



$$\underline{e}_z = \cos\vartheta \cdot \underline{e}_r - \sin\vartheta \cdot \underline{e}_\vartheta$$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \overbrace{\boxed{\dot\vartheta}}^{\omega_\varphi} \underline{e}_\varphi + \overbrace{\boxed{\dot\varphi \cos\vartheta}}^{\omega_r} \underline{e}_r \overbrace{\boxed{- \dot\varphi \sin\vartheta}}^{\omega_\vartheta} \underline{e}_\vartheta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_r & & \\ & \Theta_\vartheta & \\ & & \Theta_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & & \\ & \frac{1}{3} m L^2 & \\ & & \frac{1}{3} m L^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ -\frac{1}{3} m L^2 \dot\varphi \sin\vartheta \\ \frac{1}{3} m L^2 \dot\vartheta \end{pmatrix}$$

Forgó K.R.

$$\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M} = mg \cdot \frac{L}{2} \sin\vartheta \cdot \underline{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \emptyset \\ \frac{1}{3} m L^2 \omega_\vartheta \\ \frac{1}{3} m L^2 \omega_\varphi \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\vartheta & \underline{e}_\varphi \\ \omega_r & \omega_\vartheta & \omega_\varphi \\ \emptyset & \frac{1}{3} m L^2 \omega_\vartheta & \frac{1}{3} m L^2 \omega_\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \frac{L}{2} \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} m L^2 \begin{pmatrix} \emptyset \\ \dot\omega_\vartheta \\ \dot\omega_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset \\ -\frac{1}{3} m L^2 \omega_r \omega_\varphi \\ \frac{1}{3} m L^2 \omega_r \omega_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \frac{L}{2} \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\omega}_{\vartheta} - \omega_r \omega_\varphi &= \emptyset \\ \dot{\omega}_\varphi + \omega_r \omega_\vartheta &= \frac{3g}{2L} \sin\vartheta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -\ddot{\varphi} \sin\vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta &= \emptyset \\ \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \cos\vartheta \sin\vartheta &= \frac{3g}{2L}\sin\vartheta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cdot \mathrm{ctg}\,\vartheta \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{3g}{2L}\sin\vartheta + \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}}$$

(e) $\varphi = \mathrm{const}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{L}\sin\vartheta}$. FIZIKAI INGA

$$(\ddot{\vartheta - \pi}) \sim -\frac{3g}{2L}(\vartheta - \pi) \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

(f) : $\vartheta = \mathrm{const} = \vartheta_0$

$\Rightarrow \frac{3g}{2L}\cancel{\sin\vartheta_0} = -\dot{\varphi}_0^2 \cancel{\sin\vartheta_0}\cos\vartheta_0$

$$\boxed{\cos\vartheta_0 = -\frac{3g}{2L\dot{\varphi}_0^2}}$$

(g) $\vartheta = \vartheta_0 + \delta\vartheta$

$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \delta\dot{\varphi} \Rightarrow \delta\ddot{\varphi} = -2(\dot{\varphi}_0 + \delta\dot{\varphi})(\delta\dot{\vartheta})\,\mathrm{ctg}(\vartheta_0 + \delta\vartheta)$

$\Downarrow$ csak $1\,\delta$ marad
(linearizálás)

$$\boxed{\delta\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}_0\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0 \cdot \delta\dot{\vartheta}}$$

$$\delta\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{2L}\cdot\left[\sin\vartheta_0 + \cos\vartheta_0\,\delta\vartheta\right] + \\ + \left[\dot{\varphi}_0 + \delta\dot{\varphi}\right]^2 \sin(\vartheta_0 + \delta\vartheta)\cos(\vartheta_0 + \delta\vartheta)$$

MechaGyak 1/6

$$\delta\ddot{\vartheta} = \underbrace{\left[\frac{3g}{L}\sin\vartheta_0 + \dot{\varphi}_0^2 \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right]}_{\emptyset \text{ (lásd (f) feladat)}} + \delta\vartheta\cdot\left[\underbrace{\frac{3g}{2L}}_{-\cos\vartheta_0\dot{\varphi}_0^2}\cos\vartheta_0 + \dot{\varphi}_0^2\left[\cos^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_0\right]\right]$$

$$+\ \delta\dot{\varphi}\cdot\dot{\varphi}_0\cdot 2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0$$

$$\delta\ddot{\vartheta} = -\delta\vartheta\cdot\sin^2\vartheta_0\cdot\dot{\varphi}_0^2 + \sin 2\vartheta_0\cdot\dot{\varphi}_0\cdot\delta\dot{\varphi}$$

$$\delta\ddot{\varphi} = \underbrace{-2\dot{\varphi}_0\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0}_{\text{const}}\cdot\delta\dot{\vartheta} \Rightarrow \delta\dot{\varphi} = -2\dot{\varphi}_0\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0\cdot\delta\vartheta + \text{const.}$$

$\Downarrow$ ha eredetileg $\emptyset$, akkor az is marad.

$$\delta\ddot{\vartheta} = \left[-\sin^2\vartheta_0\,\dot{\varphi}_0^2 + \sin 2\vartheta_0\cdot\dot{\varphi}_0\cdot\left[-2\dot{\varphi}_0\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0\right]\right]\delta\vartheta$$

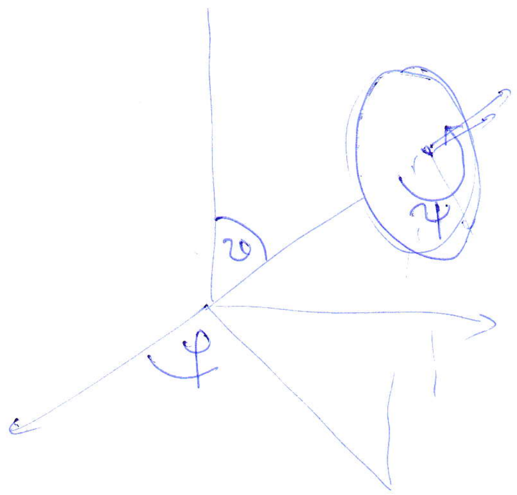
$$= \left[-\sin^2\vartheta_0\,\dot{\varphi}_0^2 - 4\cos^2\vartheta_0\,\dot{\varphi}_0^2\right]\delta\vartheta$$

$\Downarrow$ negatív együttható

$\Downarrow$

$\boxed{\text{STABIL}}$ (oszcillál $\delta\vartheta$)

4.)



Változás a 3. feladathoz képest

A koordináta rendszer szögsebessége

$$\underline{\Omega}_{KR} = \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\underline{e}_r - \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\underline{e}_\vartheta + \dot{\vartheta}\,\underline{e}_\varphi$$

A fizikai szögsebesség

$$\underline{\omega} = \underline{\Omega}_{KR} + \dot{\psi}\,\underline{e}_r$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_r & & \\ & \Theta_\vartheta & \\ & & \Theta_\varphi \end{pmatrix} = \qquad \underline{a} = a\cdot\underline{e}_r$$

$$= \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}_{TK}}_{\begin{pmatrix} \Theta_1^{TK} & & \\ & \Theta_2^{TK} & \\ & & \Theta_2^{TK} \end{pmatrix}} + \underbrace{M\cdot\left(a^2\mathbb{1} - \underline{a}\circ\underline{a}\right)}_{\begin{pmatrix} \emptyset & & \\ & Ma^2 & \\ & & Ma^2 \end{pmatrix}}$$

Tehát
$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_2 \end{pmatrix}$$ az origó körül is

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\vartheta \\ \omega_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi \\ -\dot\varphi \sin\vartheta \\ \dot\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1 (\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi) \\ \Theta_2 (-\dot\varphi \sin\vartheta) \\ \Theta_2 \dot\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{M} = mgL \sin\vartheta \cdot \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mgL\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Forgó K.R.

$$\boxed{\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\Omega}^{KR} \times \underline{L} = \underline{M}}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Theta_1 (\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi) \\ \Theta_2 (-\dot\varphi \sin\vartheta) \\ \Theta_2 \dot\vartheta \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\vartheta & \underline{e}_\varphi \\ \dot\varphi\cos\vartheta & -\dot\varphi\sin\vartheta & \dot\vartheta \\ \Theta_1(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) & \Theta_2(-\dot\varphi\sin\vartheta) & \Theta_2\dot\vartheta \end{vmatrix}}_{\underline{e}_\vartheta \cdot \left[\Theta_1 \dot\vartheta (\dot\varphi\cos\vartheta+\dot\psi) - \Theta_2 \cos\vartheta\,\dot\vartheta\,\dot\varphi\right] + \underline{e}_\varphi \cdot \left[-\Theta_2 \dot\varphi^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \Theta_1 \dot\varphi \sin\vartheta (\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mgL\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Igen komplikált egyenletrendszert kapunk.

$$\Theta_1 \cdot \frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi\right) = \emptyset$$

$$\Theta_2 \cdot \frac{d}{dt}\left(-\dot\varphi\sin\vartheta\right) + \Theta_1\dot\vartheta\left(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi\right) - \Theta_2\cos\vartheta\,\dot\vartheta\,\dot\varphi = \emptyset$$

$$\Theta_2\ddot\vartheta + \Theta_1\dot\varphi\sin\vartheta\left(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi\right) - \Theta_2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = mgL\sin\vartheta$$

Van-e precesszió $(\vartheta = \text{const})$

Első egyenlet: $\boxed{\cos\vartheta_0\ddot\varphi + \ddot\psi = \emptyset}$ $\rightarrow \ddot\psi = 0$

Második

$$-\Theta_2\ddot\varphi\sin\vartheta_0 = \emptyset \rightsquigarrow \ddot\varphi = 0$$

$\Downarrow$ $\dot\varphi = \text{const} = \dot\varphi_0$ $\qquad \dot\psi = \text{const} = \dot\psi_0$

Harmadik

$$\Theta_1 \cdot \dot\varphi_0\sin\vartheta_0 \cdot \left[\dot\varphi_0\cos\vartheta_0 + \dot\psi_0\right] - \Theta_2\dot\varphi_0^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 = mgL\sin\vartheta_0$$

$$(\Theta_1 - \Theta_2)\dot\varphi_0^2\cancel{\sin\vartheta_0}\cos\vartheta_0 + \Theta_1\dot\varphi_0\cancel{\sin\vartheta_0}\dot\psi_0 = mgL\cancel{\sin\vartheta_0}$$

$\hookrightarrow$

$$\dot\varphi_0^2(\Theta_1 - \Theta_2)\cos\vartheta_0 + \dot\varphi_0\Theta_1\dot\psi_0 - mgL = \emptyset$$

$$\hookrightarrow \dot\varphi_0 = \frac{-\Theta_1\dot\psi_0 \pm \sqrt{\dot\psi_0^2\Theta_1^2 + 4mgL\cos\vartheta_0(\Theta_1 - \Theta_2)}}{2(\Theta_1 - \Theta_2)\cos\vartheta_0}$$

$$= -\frac{\Theta_1\dot\psi_0}{2(\Theta_1 - \Theta_2)\cos\vartheta_0} \cdot \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4mgL\cos\vartheta_0(\Theta_1 - \Theta_2)}{\dot\psi_0^2\Theta_1^2}}\right]$$

$\dot{\psi}_0$ nagy

$$\rightsquigarrow \quad \dot{\varphi}_0 = -\frac{\Theta_1 \dot{\psi}_0}{(\Theta_1 - \Theta_2)\cos\vartheta_0} \quad \text{(ilyen nem volt)} \quad \text{(gyors!)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{\varphi}_0 \approx -\frac{\cancel{\Theta_1} \dot{\psi}_0}{\cancel{2(\Theta_1-\Theta_2)\cos\vartheta_0}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4} mgL \cancel{\cos\vartheta_0 (\Theta_1 - \Theta_2)}}{\dot{\psi}_0^2 \Theta_1^2} \right)$$

$$= \frac{mgL}{\Theta_1 \dot{\psi}_0} \quad \text{Stimmel!}$$