1. kis-ZH feladatok

1. Egy rugalmas gumiszál egyik végét egy vízszintes, súrlódásmentes asztalhoz szögeltük, a másik végére egy m tömegű kicsiny tömegpontot erősítettünk. A gumiszál nyújtatlan hossza elhanyagolható, a benne ébredő feszítőerő a megnyúlással arányos, ezért a tömegpont egy

$$V(r) = \frac{1}{2} D\, r^2$$

centrális potenciálban mozoghat.

   (a) Írja fel a tömegpont mozgásegyenletét, síkbeli polárkoordinátákat használva úgy, hogy az origó a vonzó potenciál centrumában legyen!

   (b) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont L perdületét, adja meg a sugárirányú mozgást meghatározó $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (c) Rajzolja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (d) Ismerjük a tömegpont E energiáját és L perdületét. Adjuk meg ezek (valamint a D és m paraméterek) segítségével a tömegpont mozgása során mért $r_{\min}$ és $r_{\max}$ minimális és maximális origótól mért távolságokat!

---

2. Súrlódásmentes vízszintes asztal közepén egy kicsiny lyukat fúrtunk. A lyukon átvezettünk egy vékony madzagot, ami a lyukon keresztül súrlódásmentesen mozoghat. Az madzag asztal feletti végére kötöttünk egy m tömegű tömegpontot, az asztal alatti végét pedig időben állandó F_0 erővel húzzuk!

   (a) A fenti elrendezésben a tömegpontra mindig F_0 nagyságú vonzóerő hat a centrum irányában. Adja meg az erőtér $V(r)$ potenciálját!

   (b) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont L perdületét, adja meg a sugárirányú mozgást meghatározó $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (c) Rajzolja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (d) Adott L perdület esetén adja meg, milyen r_0 sugarú egyenletes körmozgást végezhet a test? Mekkora a T_{circ} keringési idő?

   (e) Az előbbi körpályán mozgó testet kicsit meglöktük, ezért a körpálya körül oszcilláló mozgást végez. Adja meg az oszcilláció T_{oszc} periódusidejét! Hogy viszonyul ez T_{circ}-hez?

---

2. Gyakorló feladatok

Gy1. **(A fenti 2-es feladat kis módosítása)** Súrlódásmentes vízszintes asztal közepén egy kicsiny lyukat fúrtunk. A lyukon átvezettünk egy vékony madzagot, ami a lyukon keresztül súrlódásmentesen mozoghat. Az madzag asztal feletti végére kötöttünk egy m tömegű tömegpontot, az asztal alatti végére pedig egy M tömegű téglát kötöttünk, ami függőlegesen mozoghat fel/le.

   (a) Írjuk fel a két test mozgásegyenletét! Az asztalon lévő test mozgását síkbeli polárkoordinátarendszerben írjuk le. Az asztal síkjában mozgó m tömegű test lyuktól mért távolságát jelölje r. A fonál elegendően hosszú, így nem kell aggódnunk amiatt, hogy a lelógó tégla az asztal lapjának ütközik.

(b) Használjuk ki a perdületmegmaradást! Írjuk fel az $r(t)$ sugárirányú mozgást leíró mozgásegyenletet!

(c) Mutassuk meg, hogy a mozgásegyenlet formailag megfeleltethető egyetlen tömegpont centrális potenciálban való mozgásával. Mekkora ennek a tömegpontnak a tömege? Mi az effektív potenciál?

(d) Ha ismerjük a rendszer E energiáját és L perdületét, akkor milyen $[r_{min}, r_{max}]$ értékek között változik az asztalon lévő test lyuktól mért távolsága a mozgás során?

(e) Mi a feltétele annak, hogy az asztalon lévő tömegpont egyenletes körmozgást végezzen? Ha a perdület L, mekkora a körpálya sugara?

(f) Mutassuk meg, hogy a körpálya stabilis. Kicsit kitérítve róla a tömegpontot, milyen periódusidejű oszcillációkat végez a körpálya körül? Hogy viszonyul ez a körmozgás periódusidejéhez?

Gy2. **Beadható.** Egy függőlegesen tartott tölcsérbe bedobunk egy kis golyót, vizsgáljuk ennek mozgását! Az egyszerűség kedvéért vegyük a tölcsért fejjel lefelé álló α nyílásszögű kúpnak, a szimmetria tengelye legyen függőleges. Vegyük azt a közelítést, hogy nincs súrlódás.

(a) Vegyünk fel a kúphoz igazodó koordinátarendszert! A mozgást két koordinátával tudjuk leírni. Számítsuk ki a koordinátarendszerhez társuló egységvektorokat, beleértve a harmadik egységvektort, mely merőleges a kúp felületére.

(b) Számoljuk a tömegpont sebességét és gyorsulását ebben az egységvektor rendszerben kifejezve! Írjuk fel a mozgásegyenleteket! Felhasználhatjuk, hogy a gravitációs erőnek a kúp síkjába eső komponense a középpont felé mutat, és nagysága $mg\cos(\alpha)$.

(c) Határozzuk meg a perdületmegmaradás törvényét! Ez történhet akár a külső 3-dimenziós koordinátákkal, akár a belső mozgásegyenlettel.

(d) Írjuk fel a sugár irányú mozgásra vonatkozó mozgásegyenletet, illetve az itt kapott effektív potenciált, kihasználva a perdületmegmaradást!

(e) Legyen a tölcsér alján egy r sugarú kör alakú lyuk. Milyen kezdeti feltételek esetén eshet ki a golyó ezen?

(f) A valóságban persze mindig kiesik a golyó a tölcsérekből. Mi okozza ezt az eltérést, és hol bukik meg a számolásunk?

Gy3. Egy vízszintes síkon elhelyeztünk egy ún. exponenciális spirál alakú drótpályát, aminek polárkoordinátás egyenlete az alábbi alakú:

$$r(\varphi) = R_0 e^{k\varphi} \ ,$$

ahol R_0 egy hosszúság dimenziójú konstans. A spirálra egy m tömegű kicsiny gyöngyszemet fűztünk, ami súrlódásmentesen mozoghat a spirálon. A gyöngyszemet a $\varphi = 0$ helyzetből elindítottuk v_0 nagyságú sebességgel. Mivel a nincs súrlódás, ezért mozgása során a gyöngyszem sebességének nagysága nem változik.

(a) Feltéve, hogy a pálya egy adott φ helyzetű pontjában ismeri a gyöngyszem $\dot{\varphi}$ szögsebességét, adja meg a gyöngyszem sebességvektorát.

(b) Tudjuk, hogy a mozgása során a gyöngyszem sebességének nagysága állandó, v_0. Ezt kihasználva adja meg a gyöngyszem $\dot{\varphi}$ szögsebességét a φ helyzet függvényében!

(c) Oldja meg az így nyert differenciálegyenletet, azaz adja meg a $\varphi(t)$ függvényt! Használja ki a korábban megadott kezdeti feltételt!

(d) Adja meg a gyöngyszem origóra vonatkoztatott perdületének $L(t)$ nagyságát az idő függvényében!

(e) Láthatóan a perdület nem marad meg. Milyen erő forgatónyomatéka okozza a perdület megváltozását?

(f) Adja meg az említett erő nagyását az idő függvényében!
