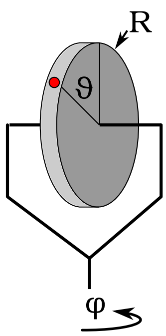
1. Háromdimenziós mozgások leírásakor a Déscartes és gömbi koordinátarendszerek mellett a harmadik gyakran használt koordinátarendszer az ún. hengerkoordinátarendszer, $\{\rho, \varphi, z\}$. Vizsgáljuk egy tömegpont mozgását ebben a koordinátarendszerben! Mozogjon a tömegpont egy kúppalástra feltekert spirális pályán,
$$\rho(t) = A\,t\,, \quad \varphi(t) = B\,t\,, \quad z(t) = C\,t$$
   (a) Vázoljuk a részecske pályáját!
   (b) A korábbi feladatokhoz hasonlóan adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban!
   (c) Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát azon pontjában, ahol a t időpillanatban halad át!

2. Háromdimenziós mozgások vizsgálata során gyakran hasznos az $\{r, \vartheta, \varphi\}$ ún. gömbi koordinátarendszer használata. A vektormennyiségeket ekkor a síkbeli polárkoordinátarendszerhez hasonlóan a koordinátavonalakat (lokálisan) érintő $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ egységvektorok bázisán érdemes kifejteni.
   (a) Adjuk meg az (r, ϑ, φ) koordinátájú ponthoz tartozó $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ lokális bázisvektorokat a derékszögű Déscartes koordinátarendszer $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ bázisvektorain kifejtve!
   (b) Tegyük fel, hogy egy tömegpont mozgása során éppen áthalad az (r, ϑ, φ) koordinátájú ponton. Ebben a pillanatban ismertek a $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ és $\dot{\varphi}$ időderiváltak. Ezek ismeretében adjuk meg a lokális bázisvektorok $\{\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\}$ időderiváltjait, az $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ Déscartes-bázisban kifejtve.
   (c) Adjuk meg az előző alfeladatban kapott $\{\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\}$ időderiváltakat a lokális $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve is!
   (d) Az előző alfeladatok eredményeinek segítségével adjuk meg egy tömegpont $\{r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\}$ gömbi koordinátákkal megadott mozgása esetén tömegpont $\vec{r}(t)$ hely-, $\dot{\vec{r}}(t)$ sebesség- és $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

3. Egy R sugarú lendkerék az ábrán látható módon ún. kardán-felfüggesztéssel van ellátva. A lendkerék elfordulását a ϑ szöggel, a kardántengely elfordulását pedig a φ szöggel mérjük. A lendkerék kerületén egy kicsiny pontszerű testet (pl. csavart) rögzítettünk, ennek mozgását vizsgáljuk. A rendszert úgy mozgatjuk, hogy a kardántengely $\dot{\varphi}$ és a lendkerék $\dot{\vartheta}$ forgási sebessége egyaránt konstans, azaz a tömegpont mozgása:
$$r(t) = R\,, \quad \varphi(t) = \Omega\,t\,, \quad \vartheta(t) = \omega\,t$$



   (a) Adjuk meg a tömegpont sebességvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
   (b) Adjuk meg a tömegpont sebességének nagyságát az idő függvényében!
   (c) Mekkora a tömegpont maximális sebessége? Hol helyezkedik-el a pályáján, amikor a sebesség maximális?
   (d) Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!